Fonte: apostila de óptica do lab4 e notas de aula dos Prof. A. Suaide e E. Szanto

# Física Experimental IV

Prof. Antonio Domingues dos Santos

adsantos@if.usp.br Ramal: 6886

Mário Schemberg, sala 205

Prof. Leandro Barbosa Ibarbosa@if.usp.br Ramal: 7157 Ala I, sala 225

Prof. Henrique Barbosa (coordenador) hbarbosa@if.usp.br Ramal: 6647

Basílio, sala 100

www.dfn.if.usp.br/curso/LabFlex www.fap.if.usp.br/~hbarbosa

Aula 4 – Computador Óptico Óptica de Fourier

Prof. Nelson Carlin carlin@dfn.if.usp.br

Ramal: 6820

Pelletron

Prof. Paulo Artaxo artaxo@if.usp.br

Ramal: 7016

Basilio, sala 101

#### Computador ótico

- Computador ótico é um dispositivo que permite a manipulação de imagem de maneira controlada sem a necessidade de efetuar cálculos complicados.
- Esse dispositivo pode e vai ser construído e estudado no laboratório e vamos, nas próximas aulas, discutir como fazê-lo em detalhe.



#### Como funciona?



... que aparece no plano de Fourier e pode ser filtrada

A 2<sup>a</sup> lente faz a transforma inversa

Projetamos a imagem filtrada no anteparo

Plano Fourier

Objeto

o laser

ilumina o objeto

COMPUTADOR ÓTICO



# Programação da Exp. 2

- Aula 1: óptica geométrica
  - Medidas com lentes convergente e divergente
- Aula 2: laser
  - Associação de lentes e aumento do diâmetro do laser
- Aula 3: difração
  - Figuras de difração e espectrofotômetro
- Aula 4: tranformada de fourier
  - Estudo no plano de fourier
- Aula 5: computador ótico
  - o Filtro na transformada de Fourier e recompor a imagem filtrada
- Aula 6: ImageJ
  - Tratamento de imagem no computador

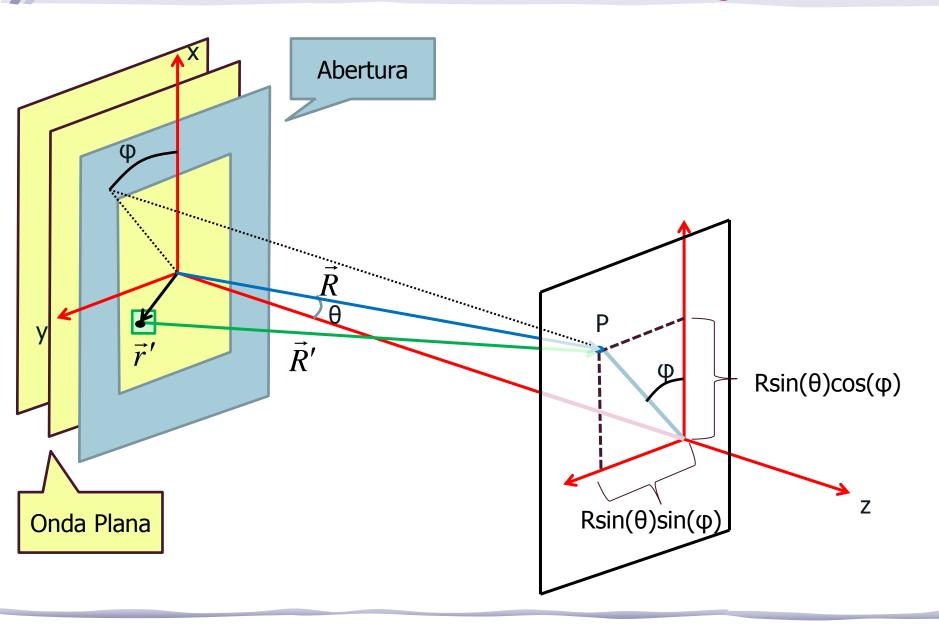


# Computador Ótico



#### Construção ...

- Primeiramente precisamos iluminar o objeto de forma uniforme
  - Qualquer luz esta ok?
- Precisamos ser capazes de, experimentalmente, obter a transformada de Fourier deste objeto
- Precisamos criar filtros que atuem de forma diferente em cada componente da T.F.
- Precisamos reconstruir a imagem a partir das componentes já filtradas



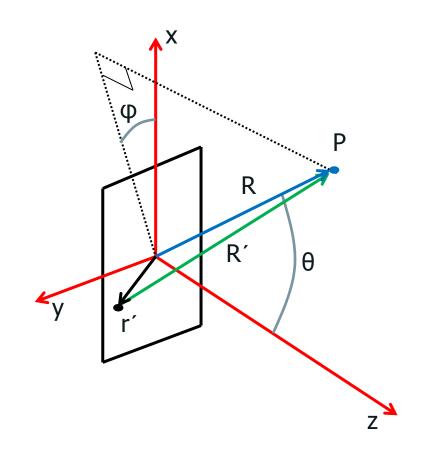
 Campo elétrico incidente no objeto

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t}$$

Por simplicidade:

$$\hat{E} = E_0 e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

 Qual o campo elétrico no ponto R?

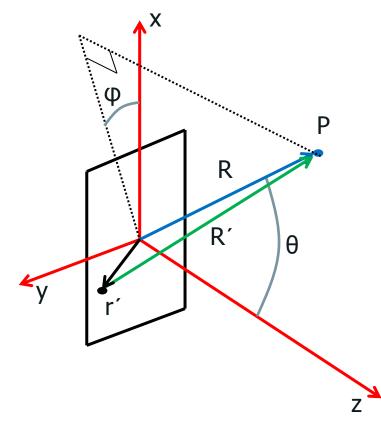


 Na posição R, o campo devido ao ponto em r' vale:

$$\hat{E}_{r'}(\vec{R}) = \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k}\cdot\vec{R}'}$$

E o campo total fica:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int_{abertura} \frac{E_0(r')}{R'} e^{j\vec{k}\cdot\vec{R}'} dxdy$$



 Para grandes distâncias, i.e. limite de Fraunhofer, temos:

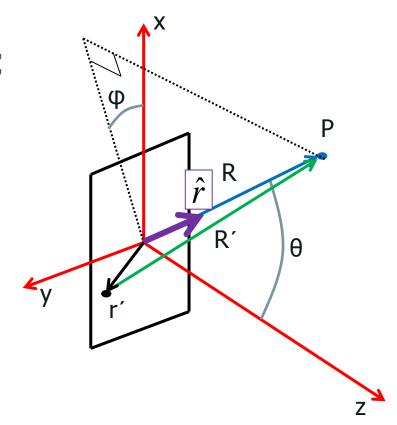
$$\vec{k} \approx k\hat{r}$$

$$\vec{R}' = \vec{R} - \vec{r}' \approx R\hat{r} - \vec{r}'$$

• Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{jkR - \vec{k} \cdot \vec{r}'} dxdy$$

$$\hat{E}(\vec{R}) = e^{jkR} \int \frac{E_0(r')}{R'} e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}'} dxdy$$

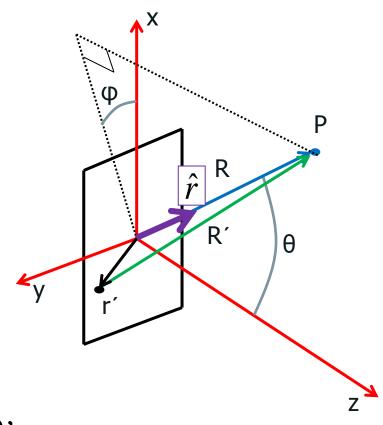


 Ainda para grandes distâncias, temos:

$$R' \approx R$$

• Assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}'} dxdy$$



• Quem é  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ ' ?

$$\vec{r}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

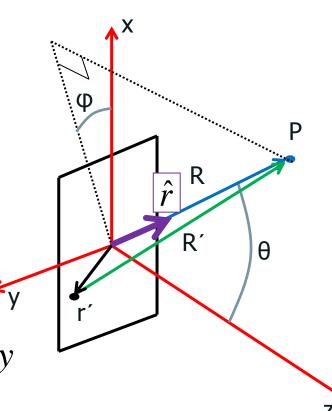
$$\vec{k} = k\hat{r} = (k\sin\theta\cos\phi)\hat{x} + (k\sin\theta\sin\phi)\hat{y} + (k\cos\theta)\hat{z}$$

• Assim:

$$\vec{k} \cdot \vec{r}' = (k \sin \theta \cos \varphi) x + (k \sin \theta \sin \varphi) y$$

• Podemos ainda definir:

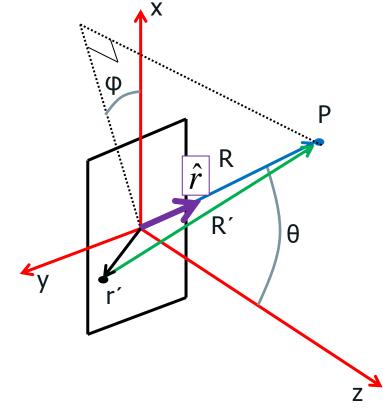
$$\begin{cases} k_x = (k \sin \theta \cos \varphi) \\ k_y = (k \sin \theta \sin \varphi) \end{cases} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}' = k_x x + k_y y$$



 A expressão para o campo era assim:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(r') e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}'} dxdy$$

 E agora pode ser escrita como:



$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

#### Séries de Fourier

A transformada de fourier em 2D

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{j(nx+my)}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) e^{-j(nx+my)} dxdy$$

Difração de Fraunhofer:

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

#### Difração e transformada de Fourier

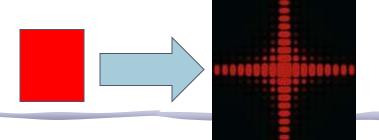
 A figura de difração está relacionada à transformada de Fourier do objeto iluminado

$$\hat{E}(\vec{R}) = \frac{e^{jkR}}{R} \int E_0(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

 A intensidade luminosa em uma dada posição está relacionada às intensidades para cada freqüência espacial

$$\hat{E}(\vec{R}) \rightarrow E(R_y, R_y) \rightarrow E(k_x, k_y)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \phi \\ k_y = k \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$



#### Generalizando ainda mais

- Para uma onda plana incidente:
  - $\circ$  E<sub>0</sub>(x,y) é constante.
- Uma onda qualquer pode ser decomposta numa soma de ondas planas.
  - Então já consideramos todos os casos?

 Não! E se a abertura não for uma fenda? E se houver uma lente ou um objeto opaco que modifiquem a amplitude ou a fase de E(x,y) em cada ponto?

#### Generalizando ainda mais

 Se houver uma lente, o que interessa é o campo transformado por ela, ou seja:

$$E_0(x,y) \underset{LENTE}{\Longrightarrow} \varepsilon(x,y)$$

A função da abertura é o campo incidente transformado pelo objeto/fenda/lente/etc onde ocorre a difração.

 A distribuição de campo elétrico na figura de difração de Fraunhofer é a transformada de Fourier da distribuição do campo elétrico na abertura.

$$\hat{E}(k_x, k_y) = \iint \mathcal{E}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy$$

$$\mathcal{E}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint E(k_x, k_y) e^{j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

#### Exemplo: Fenda Simples

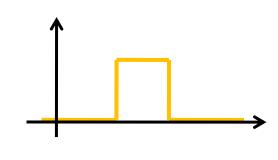
Na fenda simples, temos apenas 1D

$$\hat{E}(k_x) = \int \mathcal{E}(x)e^{-jk_x x} dx$$

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{2\pi} \int E(k)e^{jk_x x} dk$$

 A função da abertura é a onda quadrada!

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} E_0, \operatorname{se}|x| < \frac{d}{2} \\ 0, \operatorname{se}|x| > \frac{d}{2} \end{cases}$$



#### Exemplo: Fenda Simples

Vamos fazer a integral da onda quadrada:

$$\hat{E}(k) = \int \mathcal{E}(x)e^{-jk_{x}x}dx = E_{0} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-jk_{x}x}dx = E_{0} \left[ \frac{e^{-jk_{x}x}}{-jk_{x}} \right]_{-d/2}^{d/2}$$

Lembrando da notação complexa para o seno:

$$\hat{E}(k) = \frac{E_0}{k_x} \frac{\left(e^{+jk_x d/2} - e^{-jk_x d/2}\right)}{j} = 2\frac{E_0}{k_x} \sin(k_x d/2)$$

Multiplicando e dividindo por d, temos:

$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin(k_x d/2)}{k_x d/2}$$

#### Exemplo: Fenda Simples

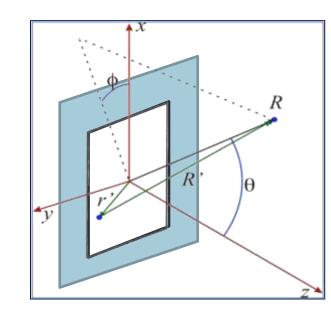
• O  $k_x$  é a projeção do vetor de onda em x:

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

Como só temos 1 dimensão:

$$k_{x} = k \sin(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta)$$

• E o campo elétrico fica dado por:



$$\hat{E}(k) = E_0 d \frac{\sin \beta}{\beta}, \qquad \beta = \frac{k_x d}{2} = \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta)$$
A intensidade depende da depende da largura da fenda 
$$\Rightarrow I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2$$
Exatamente tínhamos a

Exatamente o que tínhamos antes!

#### Exemplo: T.F.

 Será que a posição e a intensidade dos máximos são o que esperamos?

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2, \ \beta = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

Para os máximos SECUNDÁRIOS, sin(β)=±1

$$\sin \beta = 1 \Rightarrow \beta = \pm (2m+1)\frac{\pi}{2}, m = 0,1,2,3,...$$

$$\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta = \pm (2m+1) \frac{\pi}{2}$$

• E as posições são:

$$\Rightarrow \sin \theta_{\text{max}} = \pm \frac{\lambda}{2d}, \pm 3\frac{\lambda}{2d}, \pm 5\frac{\lambda}{2d}, \dots$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??

#### Exemplo: T.F.

• A intensidade é:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Portanto os máximos SECUNDÁRIOS ficam:

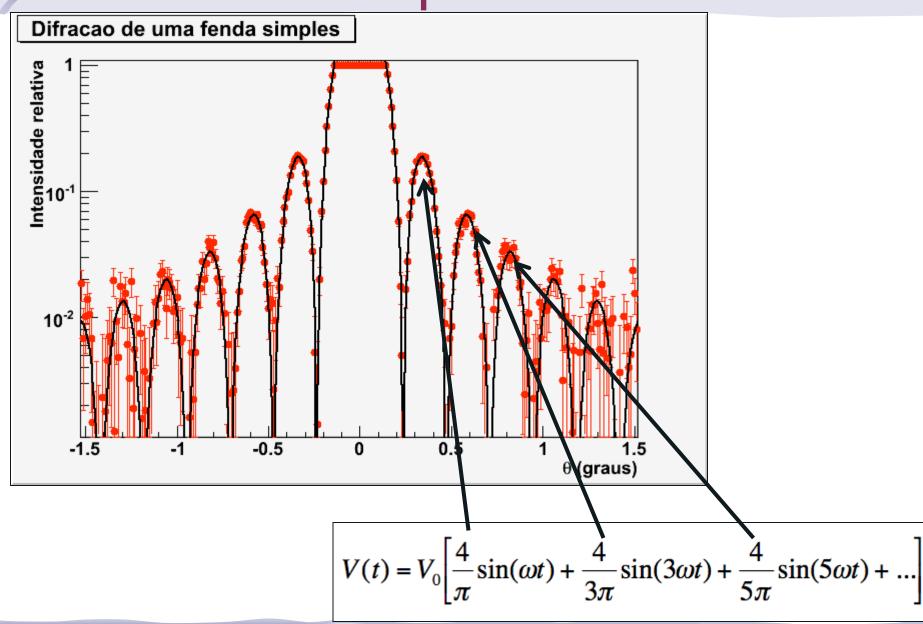
$$I(\theta_{\text{max}}) = \frac{I_0}{\beta^2} = \frac{1}{(2m+1)^2} \frac{4I_0}{\pi^2} = 1 \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{9} \frac{4I_0}{\pi^2}, \frac{1}{25} \frac{4I_0}{\pi^2}, \dots$$

Assim, o campo elétrico é:

$$\left| \hat{E} \right| = \sqrt{I} \Rightarrow \frac{\left| \hat{E} \right|}{\sqrt{\frac{4I_0}{\pi^2}}} = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$$

Lembram da T.F. da onda quadrada ??

#### Exemplo: T.F.



#### Tarefas 1 – Para relatório

Com os dados da semana passada, do espectro de difração da fenda simples:

- Obtenha a razão entre as intensidades de cada máximo secundário e aquela do primeiro máximo secundário
  - Determine as posições e amplitudes
  - Compare com a previsão teórica.



# Difração x Computador ótico

- A condição de Fraunhofer estará satisfeita se o anteparo estiver a uma distância muito grande em comparação às dimensões da abertura. No caso das fendas utilizadas no experimento anterior esse é o caso:
  - A nossa bancada é suficientemente longa se comparado às dimensões das fendas utilizadas (μm)
- Mas no caso de objetos maiores, não é possível observar a figura de difração de Fraunhofer, pois o comprimento de onda é pequeno e a bancada é curta.

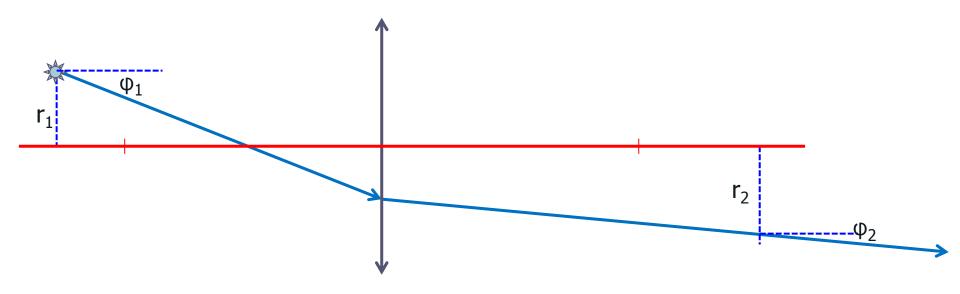
#### Computador ótico

- Então, como fazer a transformada de Fourier da imagem do nosso objeto macroscópico?
- Sabemos que quando a imagem do objeto passar pela lente, do outro lado vai sair um  $E(k_x, k_y)$  que é a transformada de Fourier do  $\varepsilon(x, y)$ .
- Para saber o que vai acontecer exatamente, é preciso considerar como a lente modifica a amplitude e a fase de  $E_0$  em cada ponto (x,y).
  - Vejam detalhes no site da Rice University, Physics 332, Fourier optics, seção C.

O que acontece é que a transformada de Fourier aparece no plano focal.

#### Lente simples

 Seja uma fonte pontual em um sistema óptico do tipo:



Vamos relembrar como tratamos as lentes...

#### T.F. e o método matricial

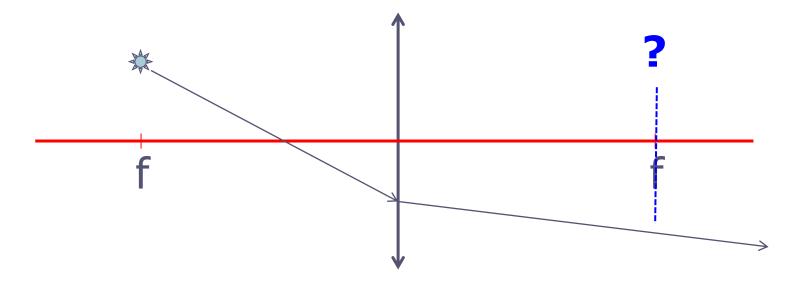
Seja uma transformação do tipo:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = 1 + B\phi_1 \\ \phi_2 = Cr_1 + 1 \end{cases}$$

- Se  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , todos os raios de mesmo ângulo  $\phi_1$  passam pelo mesmo ponto  $\mathbf{r_2}$
- Se  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , todos os raios de mesmo ponto de origem  $\mathbf{r_1}$  emergem com o mesmo ângulo do sistema óptico  $\mathbf{\phi_2}$ .

#### Lente simples

 Agora vamos considerar uma fonte pontual no plano focal...



• O que acontece?

#### Calculando...

A matriz de transformação é:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1/f \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}$$



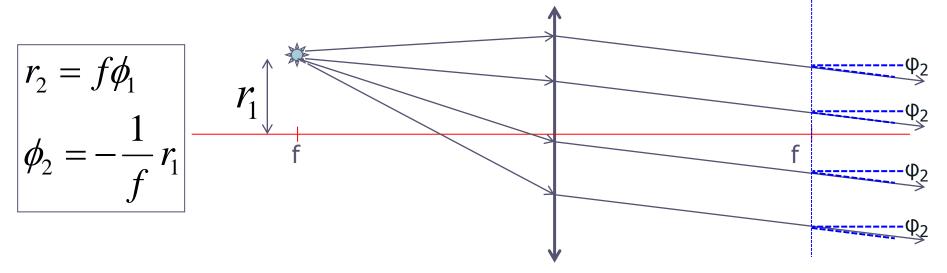
$$r_2 = f\phi_1$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{f}r_1$$

O Ângulo no qual o raio de luz emerge depende apenas da posição da fonte, ou seja, os raios emergem paralelos → onda plana

#### Lente simples

- Fonte pontual no plano focal.
  - Todos os raios emergem com o mesmo ângulo
    - → saída é uma **onda plana**



 O que está acontecendo? Porque um fonte pontual se transforma em uma onda plana??

#### Uma T.F. importante

• Um fonte pontual é uma função delta:

$$f(r) = \delta(r - b)$$

• Cuja transformada de fourier é:

$$FT\left\{\delta(r-b)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r-b)e^{-2\pi i r k} dr = e^{-2\pi i b k}$$

 ...uma onda plana!! conseqüentemente, a transformada de Fourier de uma onda plana será uma função delta!

#### Onda plana

 Onda plana de direção bem definida (não necessariamente no eixo óptico do sistema)

$$E = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\sin\phi} \sim e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r\phi} = e^{2\pi i\mu r}, \qquad \mu = \frac{\phi}{\lambda}$$

A transformada de fourier é:

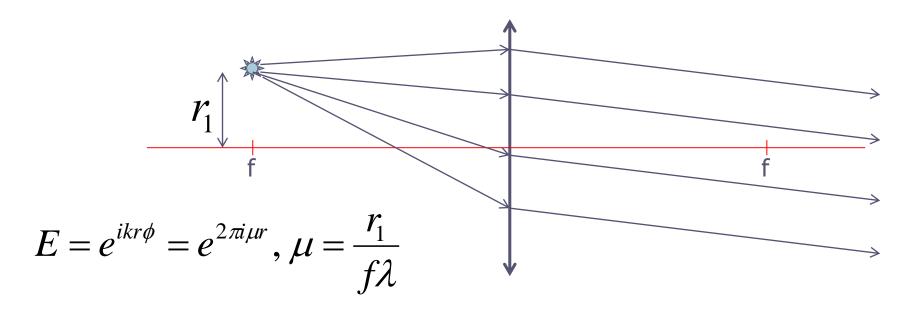
tem dimensão de freq: é a frequência espacial

$$FT\left\{e^{2\pi i\mu r}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\mu r} e^{-2\pi ikr} dr = \delta(\mu - k)$$

a transformada de Fourier de uma onda plana é uma função delta

#### Lente simples

 Fonte pontual no plano focal: a lente está fazendo a transformada de fourier!



NOTA: colocamos todas as distâncias=f, por isso aparece a transformada de fourier exata. Se um deles fosse diferente, apareceria uma **fase**. Como estamos medindo apenas a amplitude, não vemos isso no lab!

## O reverso de aplica

 Se um conjunto de raios paralelos atinge uma lente em um ângulo bem definido, eles se cruzam no plano focal de tal modo que essa posição vale:

$$r_2 = f\lambda\mu = f\phi_1$$

 Como μ é uma freqüência espacial, tem dimensão de 1/[L], de tal forma que 1/μ tem dimensão de [L] e podemos escrever:

$$\lambda \mu = \phi_1 \Longrightarrow \frac{\lambda}{d} = \phi_1 \Longrightarrow d\phi_1 = \lambda$$

#### Finalmente...

A equação de primeira ordem de um objeto difrator é

$$d\phi_1 = \lambda$$

Lembrar da equação:

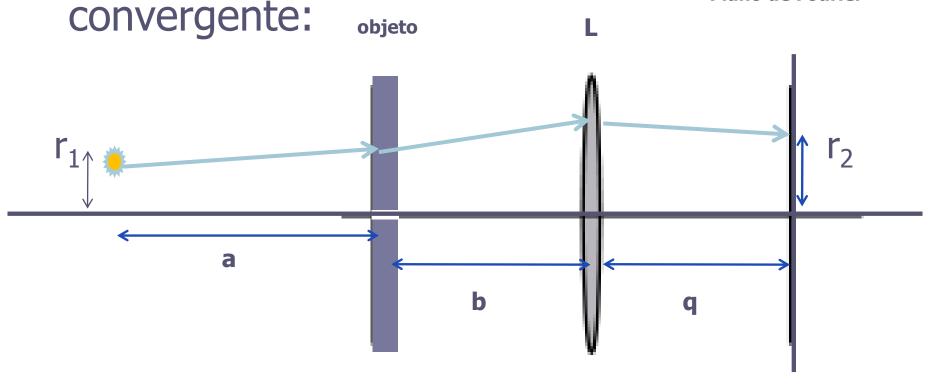
$$dsen\theta = m\lambda$$

onde **d** é uma dimensão característica do objeto difrator

 Como o padrão de difração corresponde à transformada de Fourier (no campo elétrico), <u>a lente funciona como um</u> elemento que permite obter essa TF.

### Generalizando...

 Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer vamos calcular onde se situa a T.F. obtida com uma lente

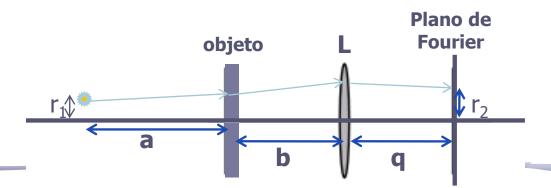


### Generalizando...

- Iluminando o objeto com uma fonte pontual qualquer
- A matriz de transformação é (deduzam):

$$r_2 = \left(1 - \frac{q}{f}\right)r_1 + \left(a + b - \frac{aq}{f} - \frac{bq}{f} + q\right)\varphi_1 + \left(b + q - \frac{bq}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$

$$\varphi_2 = -\frac{r_1}{f} + \left(-\frac{a}{f} - \frac{b}{f} + 1\right)\varphi_1 + \left(1 - \frac{b}{f}\right)\frac{m\lambda}{d}$$



### Generalizando...

r<sub>2</sub> deve ser independente de φ<sub>1</sub>

$$(a+b)-(a+b)\frac{q}{f}+q=0$$
  $\frac{1}{f}=\frac{1}{q}+\frac{1}{a+b}$ 

 Se a fonte está no infinito, ou seja, o objeto está iluminado por uma onda plana:

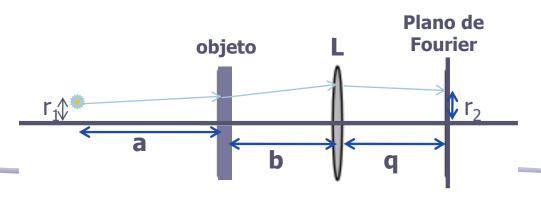
$$a \to \infty \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{a+b} \Rightarrow q = f$$

# Posição do plano de fourier

 A posição do plano de Fourier de uma lente depende tanto da posição da fonte (a) quanto do objeto em relação a lente (b).

 Caso a fonte esteja no infinito, o plano de Fourier encontra-se na distância focal da lente e

INDEPENDE da posição do objeto.



$$q = f$$

## "Tamanho" da transformada

 Se a fonte está no eixo óptico, a posição de convergência dos raios é:

$$r_1 = 0 \implies r_2 = \left(b + q - \frac{bq}{f}\right) \frac{m\lambda}{d}$$

 Substituindo a expressão para a distância focal, temos:

$$r_2 = \left(\frac{qa}{a+b}\right) \frac{m\lambda}{d}$$

Se o objeto esta na distância focal, b=f, e:

$$r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$

# Objetivos da semana

Estudar o plano de fourier de uma lente

Posição do plano

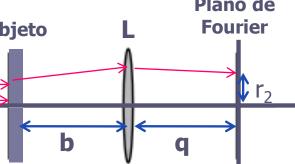
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a+b}$$

- Tamanho da T.F.
  - Objeto no foco

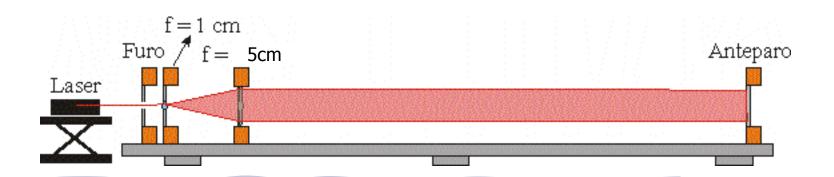
$$r_2 = f \frac{m\lambda}{d}$$

#### Tarefa 2 – Para síntese

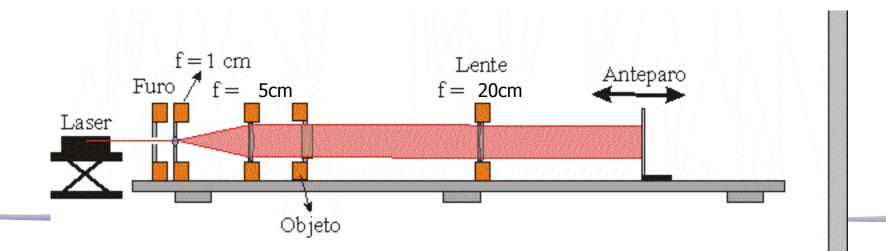
- Ilumine o objeto, com o feixe paralelo (fonte no ∞):
  - Use a rede de difração de 300 linhas/mm como objeto
- Identifique o plano de Fourier q=f
- Verifique que a posição do plano de Fourier não depende da posição do objeto em relação à lente
  - Faça pelo menos 3 medidas
- A partir das medidas das posições dos máximos (r<sub>2</sub>) da transformada de Fourier, determine as dimensões da grade e compare com o valor nominal de 300 l/mm
- Comente os resultados.

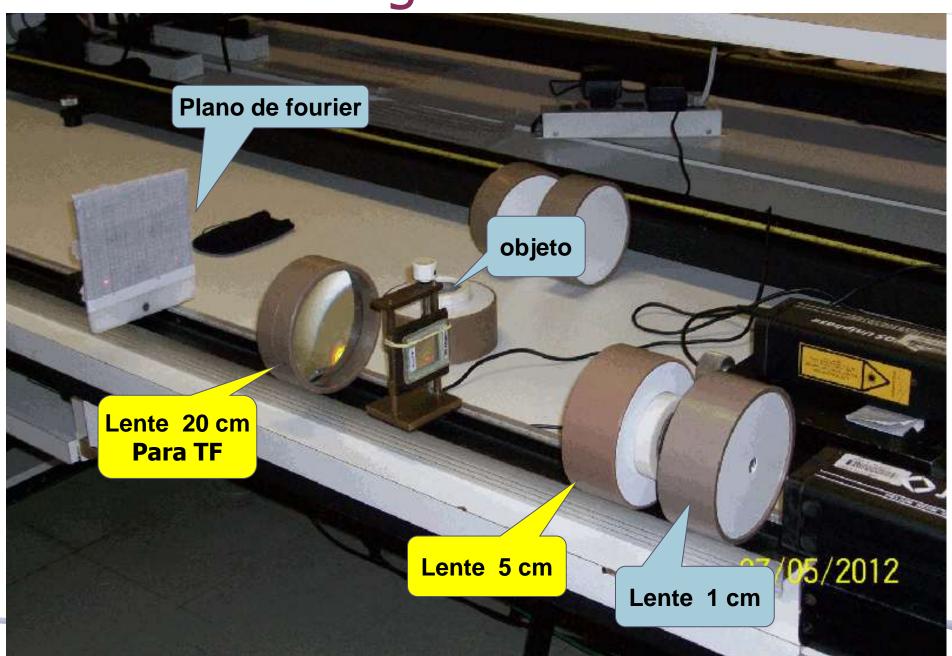


- Alargar o laser para poder incidir na imagem
  - Usar a lente de f = 1 cm e f = 5cm
  - $\circ$  Aumento do laser = 5/1 = 5vezes
  - <u>Lembre da experiência de lentes para saber como</u> <u>determinar a distância entre as lentes.</u>
    - A primeira pode ser bem próxima ao furo.



- Montar o computador óptico
  - Colocar o objeto (rede de 300/mm) na posição vertical.
  - Colocar uma lente de f = 20 cm
  - Posicionar o objeto à várias distâncias lente.
  - Mover o anteparo e encontrar o plano de Fourier





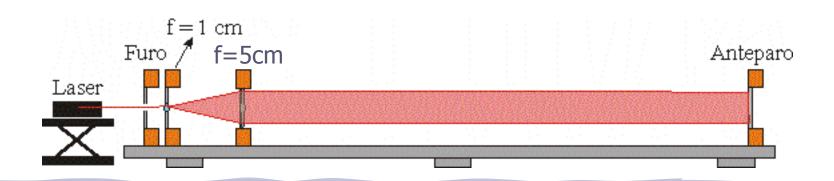
#### **Tarefas 3 - Relatório**

- Crie uma fonte pontual, ajustando a divergência do feixe
- Coloque o objeto no foco da convergente, isto é, b=f
- Determine a posição do plano de Fourier em função da posição da fonte pontual e compare com o previsto teoricamente
  - repita o procedimento para pelo menos 3 posições diferentes da fonte em relação ao objeto (a) para comparar com a previsão teórica da posição do plano em relação à lente (q)
- Verifique que, se o objeto estiver no foco b=f, as posições dos máximos (r<sub>2</sub>) não variam: independem da posição da fonte em relação ao objeto (a):
  - Desde que a figura esteja no plano
     de Fourier, (q vai variar)

    Plano de Fourier

     r<sub>2</sub>

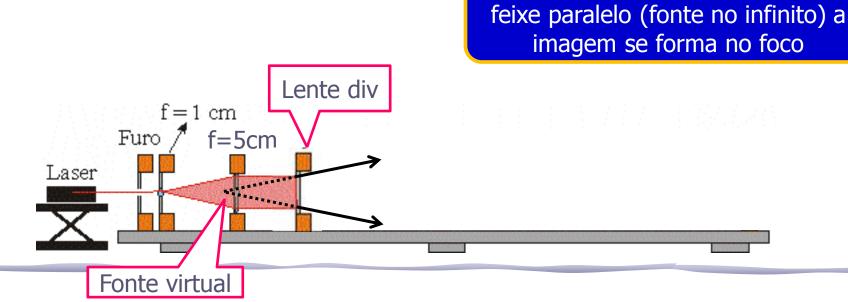
- Fonte pontual a uma distância FINITA:
  - ajustar a posição da lente de 5 cm em relação à de 1 cm (divergência da saída)
  - Ou usar uma lente divergente (mais fácil)



- Fonte pontual a uma distância FINITA:
  - ajustar a posição da lente de 5 cm em relação à de 1 cm (divergência da saída)

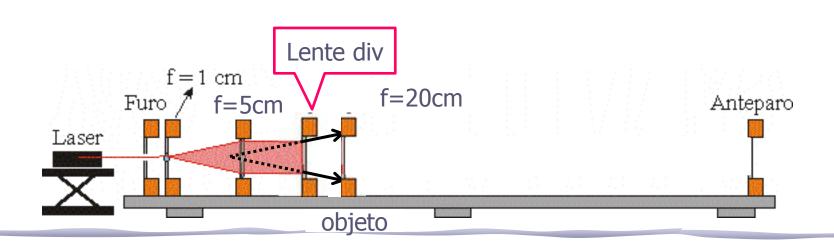
p/ a lente divergente (f negativo):

Ou usar uma lente divergente (mais fácil)



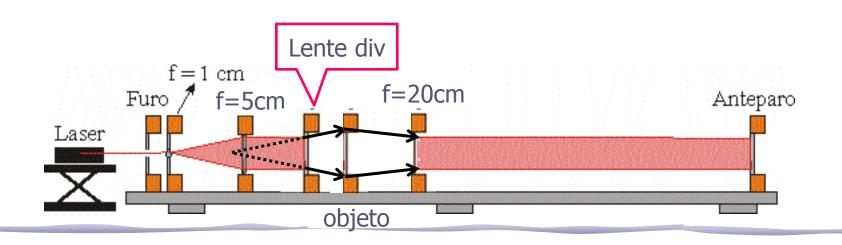
#### Montar o computador óptico:

- Colocar a lente divergente (10cm) próxima à lente de 5cm (você vai ter que ajustar)
- Colocar o objeto (no caso, a rede) na posição vertical.



#### Montar o computador óptico:

- Colocar a lente divergente (10cm) próxima à lente de 5cm (você vai ter que ajustar)
- Colocar o objeto (no caso, a rede) na posição vertical.
- Colocar a lente de f = 20 cm para a transformada
- Posicionar o objeto à distância apropriada da lente.
- Posicionar o anteparo de modo a determinar o plano de Fourier





### **ALINHAMENTO**

- Alinhamento do sistema óptico:
  - Montar, no trilho, dois orifícios e um anteparo rebaixado no centro.
  - Alinhar o laser, fazendo o feixe passar por todos os furos e atingir o centro do anteparo.
  - O SISTEMA ESTÁ PRE-ALINHADO!
     VERIFIQUEMA ANTES DE TENTAR AJUSTAR...

