Física Experimental IV

Aula 2 - Experiência 1
Circuitos CA e Caos
2013

Prof. Antonio Domingues dos Santos
adsantos@if.usp.br
Ramal: 6886
Mário Schemberg, sala 205

Prof. Leandro Barbosa
lbarbosa@if.usp.br
Ramal: 7157
Ala1, sala 225

http://lababerto.if.usp.br/

Prof. Henrique Barbosa
(**coordenador**)
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
carlin@dfn.if.usp.br
Ramal: 6820
Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br
Ramal: 7016
Basilio, sala 101

Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC
  - Circuito integrador e análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

Joseph Fourier(1768-1830)

- Aos 12 anos foi estudar no *Ecole Royale Militaire of Auxerre*
- Aos 14 anos concluiu os estudos dos 6 volumes do *Bézout's Cours de mathematique*
- Aos 15 ganhou um prêmio por seus estudos do livro *Bossut's Méchanique en général*
- Aos 19 entrou no mosteiro beneditino de St. B
virar padre, mas continuou estudando matemá
batina aos 21
- Aos 22 tornou-se professor na *Ecole of Auxerre*
- Quanto completou 26, foi fundada a *Ecole Nor*
Fourier estava na primeira turma. Teve como p
- Aos 27 foi indicado para uma cadeira da *Ecole*
(dir. Carnot e Monge) => Ecole Polytechnique

http://www.shsu.edu/

Joseph Fourier(1768-1830)

- Aos 29 substituiu Lagrange na cadeira de análise e mecânica
- Aos 30 assumiu o posto de conselheiro científico no exército de Napoleão que invadiria o Egito. Monge e Malus também estavam na equipe.
- Durante sua estada no Cairo trabalhou como administrador, criando instituições de educação. Também fez explorações arqueológicas.
- Aos 31 retornou a Paris, mas a contra gosto foi nomeado por Napoleão prefeito de Grenoble. Trabalhou então na drenagem dos pântanos da Borgonha e na rodovia ligando Grenoble a Torino.
- Foi durante este tempo em Grenoble que ele fez seu trabalho científico mais importante: S*obre a propagação de color em corpos sólidos.*
- Fourier introduziu séries infinitas de funções para resolver a equação de transferência de calor em uma placa de metal.

http://www.shsu.edu/~icc_cmf/bio/fourier.html

Série de Fourier (1807)

- Só haviam soluções particulares para fontes de calor senoidal. A idéia foi modelar uma fonte de calor complicada como uma combinação linear de senos e cossenos.
- Objeções da banca (não aprovou o trabalho):
  - Laplace e Lagrange não aceitaram a derivação teórica
  - Biot, Poisson e Laplace reclamaram que ele não citou o paper de 1804 de Biot (que hoje sabemos estar errado)
- Em 1811 o prêmio anual do Instituto de Ciências de Paris iria para quem resolvesse a equação de transporte de calor e Fourier submeteu o tratado de 1807.
- O comitê formado por Lagrange, Laplace, Malus, Hauy e Legendre deram o prêmio para Fourier pois só havia +1 concorrente:
  - *... the manner in which the author arrives at these equations is not exempt of difficulties and that his analysis to integrate them still leaves something to be desired on the score of generality and even rigour.*

http://www.shsu.edu/~icc_cmf/bio/fourier.html

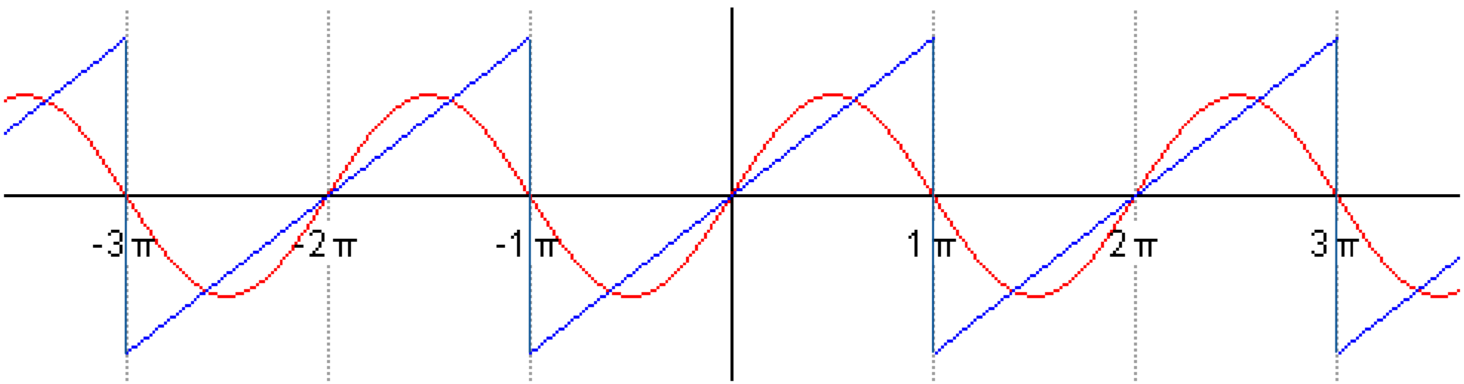
Séries de Fourier

- Funções trigonométricas podem ser combinadas de tal forma a representar qualquer função matemática

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- As constantes a_n e b_n podem ser obtidas a partir de:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$



Séries de Fourier

Hoje em dia, usamos formalismos mais abrangentes:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}$$

Use a fórmula de Euler e substitua na expressão anterior

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-jnx} dx$$

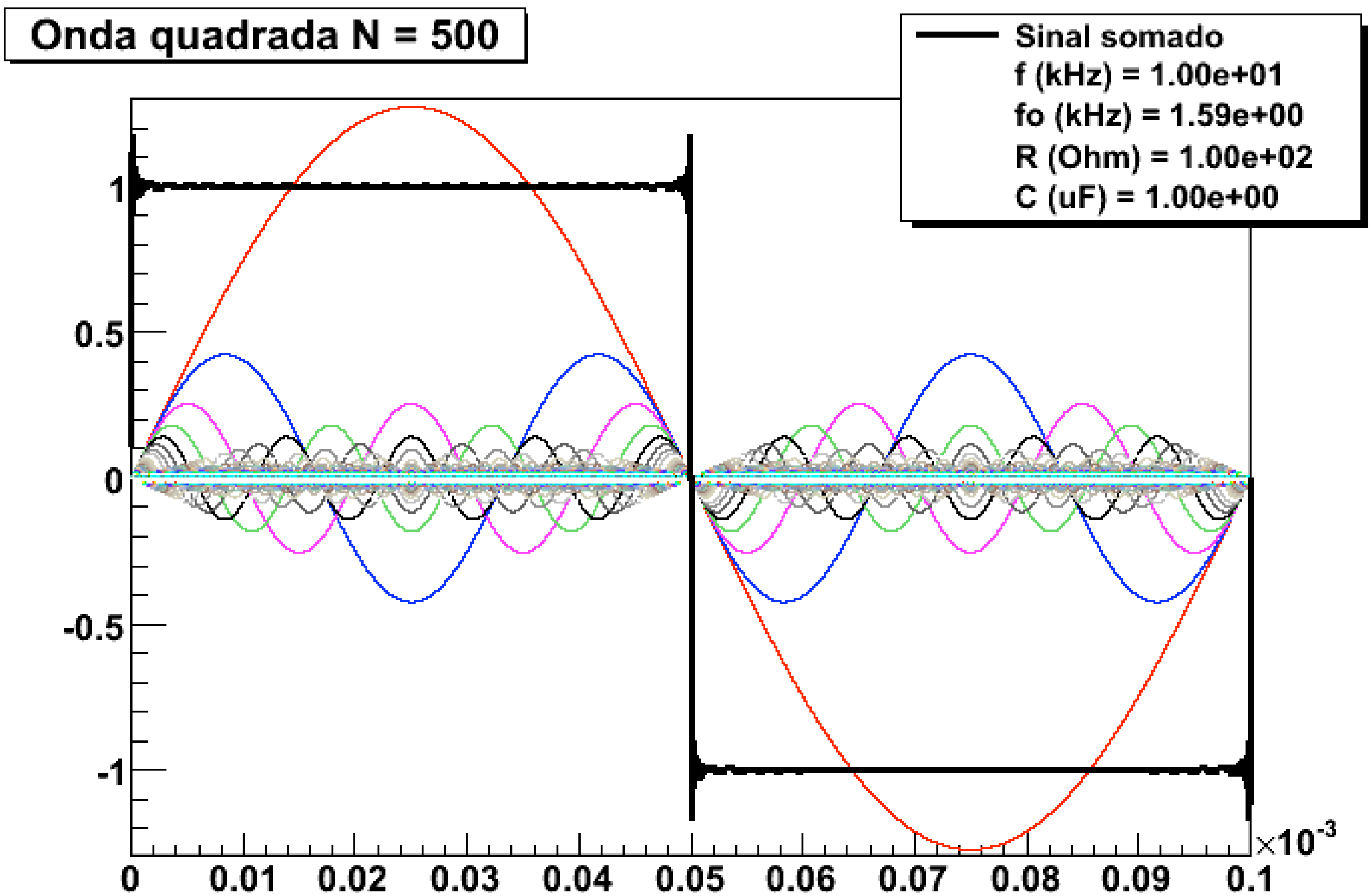
As constantes a_n e b_n da expressão tradicional podem ser obtidas como:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \text{ com } n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}), \text{ com } n = 0,1,2,\ldots$$

Exemplo: Onda Quadrada

$$V(t) = V_0 \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \cdots\right]$$



Simulação: prof. Suaide

De volta ao circuito RC

- Se o sinal de entrada for quadrado, como resolvemos a equação diferencial?

$$\hat{V}_e(t) = \frac{1}{\omega_0}\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t), \text{ mas } \hat{V}_e(t) = \sum_n v_n^e e^{j\omega_n t}$$

- Substituindo

$$\sum_n v_n^e e^{j\omega_n t} = \frac{1}{\omega_0}\frac{d\hat{V}_C(t)}{dt} + \hat{V}_C(t), \text{ e fazendo } \hat{V}_C(t) = \sum_n \hat{v}_n^C e^{j\omega_n t}$$

$$\sum_n v_n^e e^{j\omega_n t} = \sum_n \left[\left(j\frac{\omega_n}{\omega_0} + 1\right)\hat{v}_n^C e^{j\omega_n t}\right]$$

De volta ao circuito RC

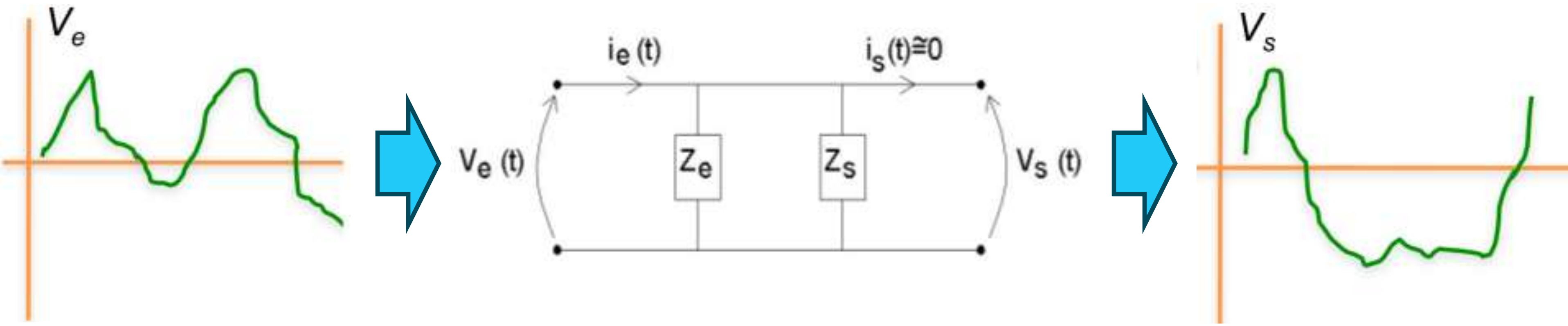
- Esta equação pode ser desmembrada em um sistema de equações diferenciais:

$$v_n^e e^{j\omega_n t} = \left(j\frac{\omega_n}{\omega_0} + 1 \right) \hat{v}_n^C e^{j\omega_n t}, \ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$$

- Cuja solução é:

$$\hat{v}_n^C = \frac{v_n^e}{j\frac{\omega_n}{\omega_0} + 1}, \ \mathrm{n} = 1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{v}_n^C}{v_n^e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega_n}{\omega_0}} = \mathrm{G}(\omega_n)$$

O que o circuito faz no sinal?

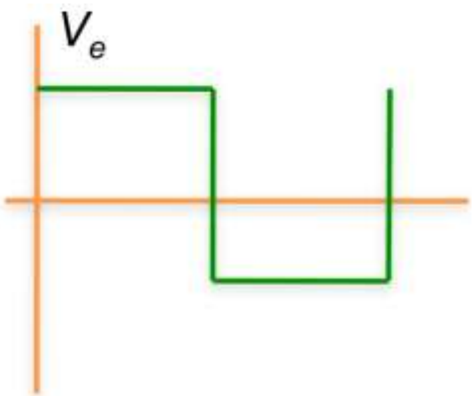


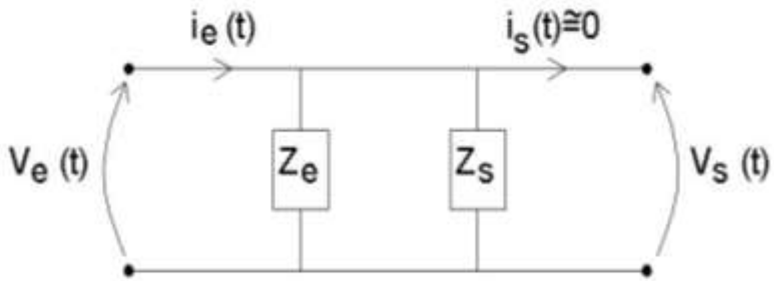
$$
\begin{aligned}
V_{entrada} = &V_1^S \sin(\omega_1 t) \\
&+ V_1^C \cos(\omega_1 t) \\
&+ V_2^S \sin(\omega_2 t) \\
&+ V_2^C \cos(\omega_2 t) \\
&+ \cdots \\
&+ V_N^S \sin(\omega_N t) \\
&+ V_N^C \cos(\omega_N t)
\end{aligned}
$$

$$
G_i = G(\omega_i, R, C)
$$
$$
\phi_i = \phi(\omega_i, R, C)
$$

$$
\begin{aligned}
V_{Saida} = &V_1^S G_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\
&+ V_1^C G_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\
&+ V_2^S G_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\
&+ V_2^C G_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\
&+ \cdots \\
&+ V_N^S G_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \\
&+ V_N^C G_N \cos(\omega_N t + \phi_N)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Onda quadrada





?

$$V_e = \begin{cases} \dfrac{4V_0}{\pi}\sin(\omega t) + \\ \dfrac{4V_0}{3\pi}\sin(3\omega t) + \\ \dfrac{4V_0}{5\pi}\sin(5\omega t) + \\ \quad\cdots \end{cases}$$

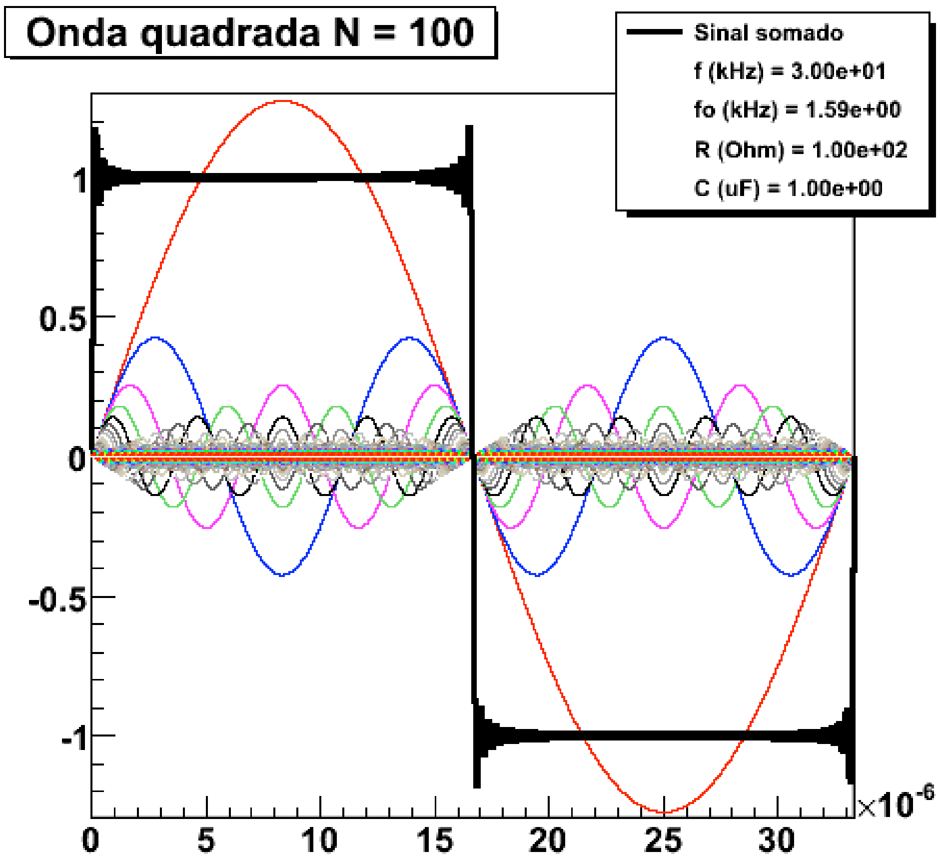
$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}$$

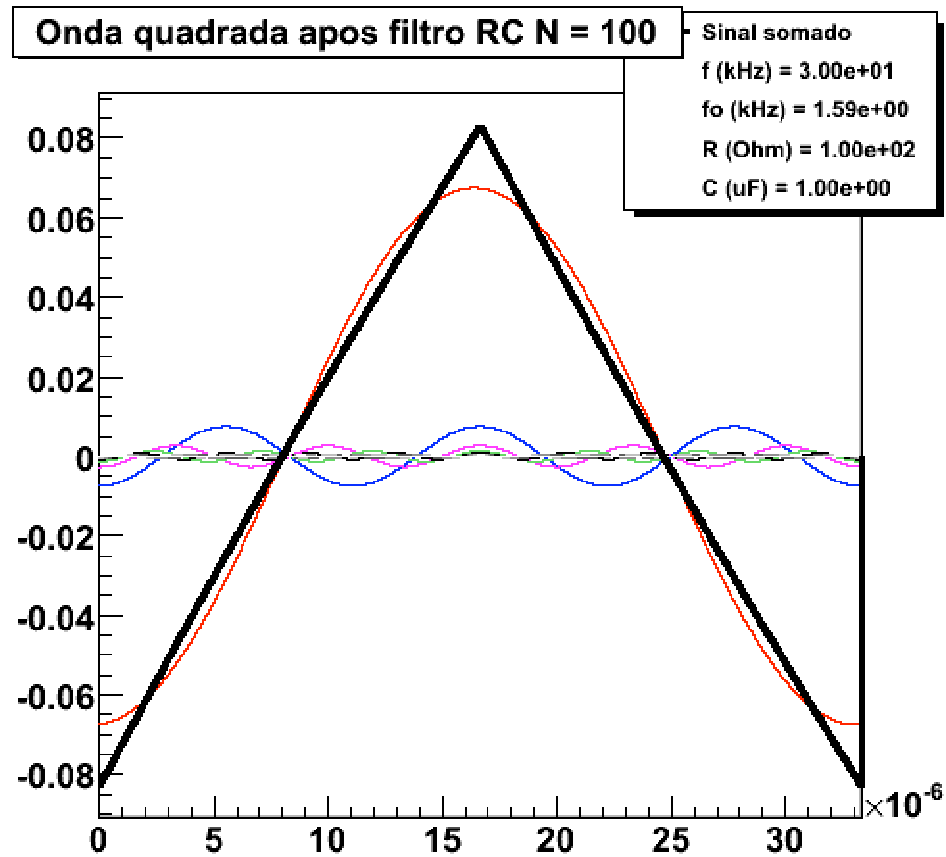
$$\phi(\omega) = \tan^{-1}(-\omega/\omega_c)$$

$$V_s = \begin{cases} G_\omega \dfrac{4V_0}{\pi}\sin(\omega t + \phi_\omega) + \\ G_{3\omega}\dfrac{4V_0}{3\pi}\sin(3\omega t + \phi_{3\omega}) + \\ G_{5\omega}\dfrac{4V_0}{5\pi}\sin(5\omega t + \phi_{5\omega}) + \\ \quad\cdots \end{cases}$$

Filtro RC (R=100, C=1μF) F_c~1.5kHz

30000Hz





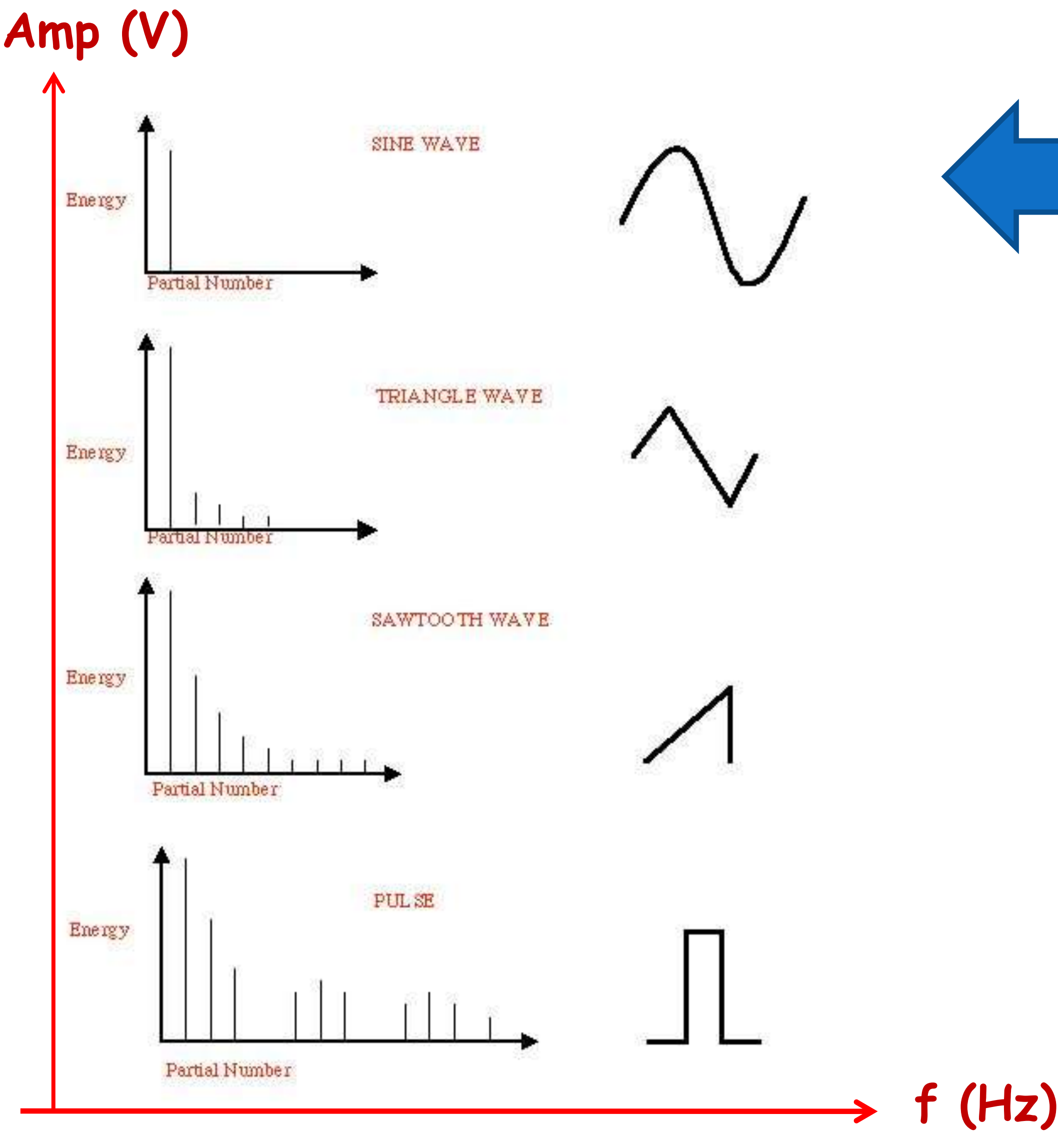
Resultado

- Nessa série de imagens o que vemos é:
  - À medida que aumentamos a freqüência, o circuito passou de uma bom filtro passa-baixa a um bom integrador.
- E isso foi feito com um programa que:
  - decompõe a onda quadrada da entrada numa série de Fourier
  - aplica a cada componente da onda quadrada o ganho e a fase
  - soma tudo e recompõe a onda na saída.
- Então podemos simular o que o circuito **RC** faz com um algoritmo, graças a Fourier

Como Analisar as Freqüências de um Sinal

- Análise de Fourier ou transformada de Fourier
  - É um gráfico no qual o eixo-X representa a freqüência da componente de Fourier e o eixo-Y mostra a amplitude daquela componente
  - Deste modo pode-se ver claramente qual a contribuição de cada harmônica para o sinal final e podemos projetar os circuitos com o mínimo de interferência
  - Abre inúmeras possibilidades para tratamento de sinais e imagens.
- Métodos numéricos de obtenção para sinais discretos
  - FFT " Fast Fourier Transform

Como encontrar a série de Fourier para um sinal?



Um seno puro só tem uma freqüência, então sua transformada é uma função delta de Dirac!

Transformada direta:

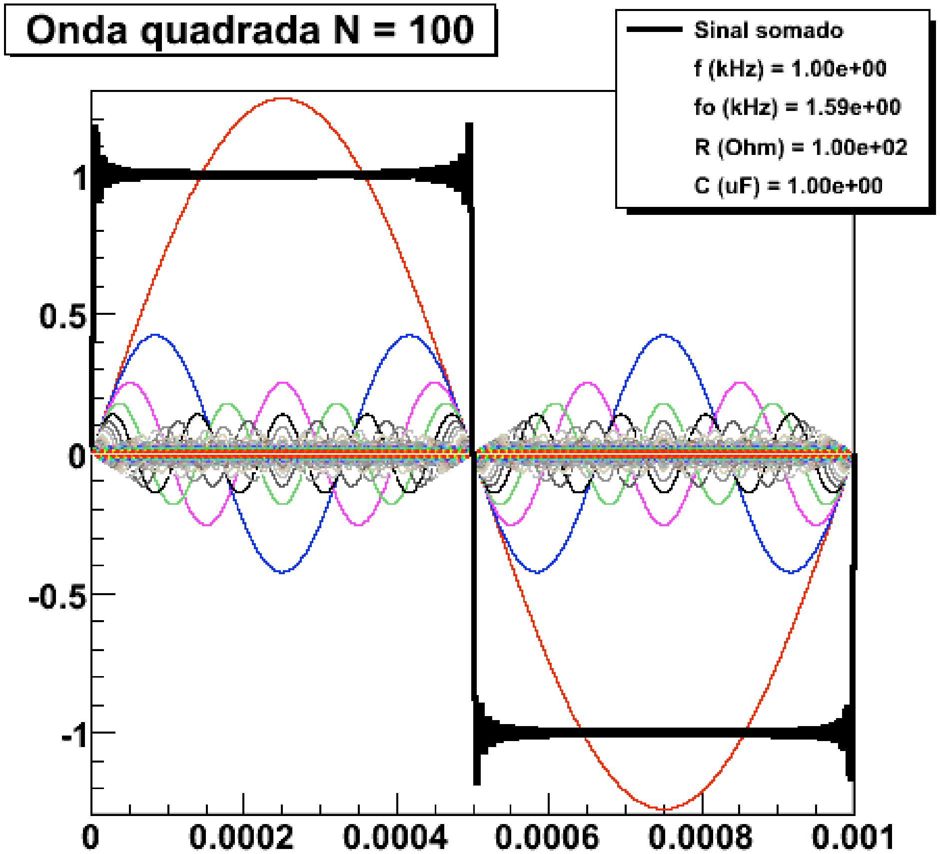
$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\omega \cdot x}\, dx.$$

Transformada inversa:

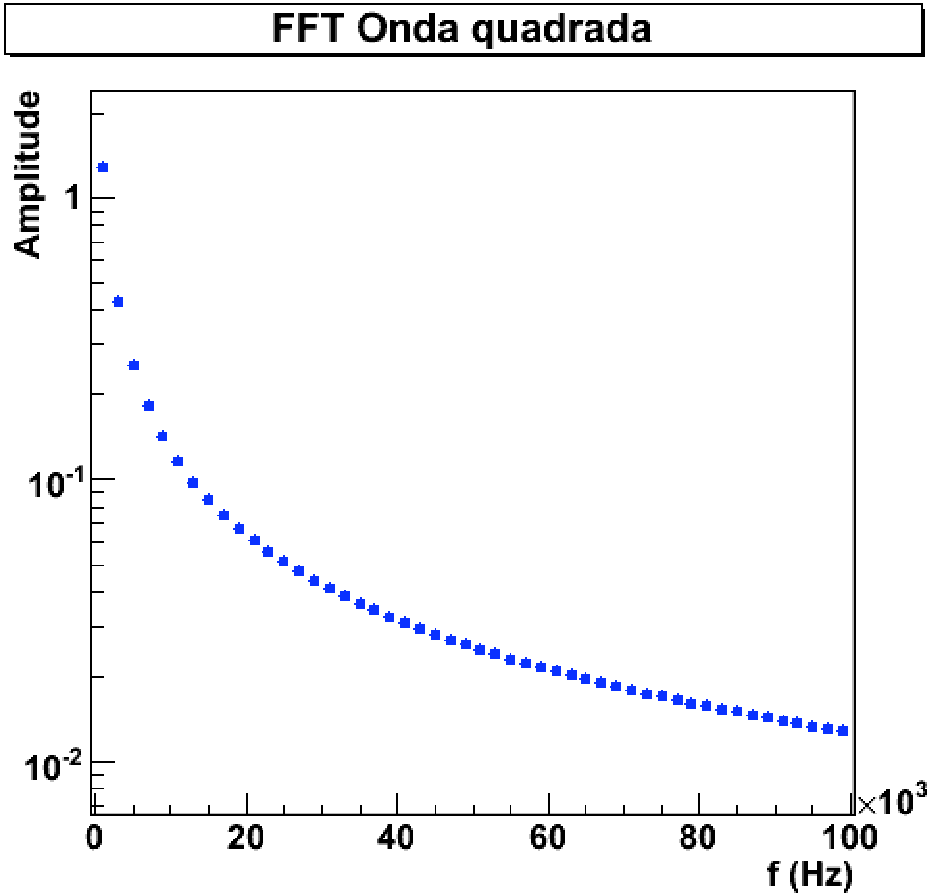
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x}\, d\omega.$$

Exemplo: Onda Quadrada

Sinal



Transformada de Fourier
Espectro de amplitude



Tarefas 1 – Para Síntese

Usando o mesmo circuito da semana passada, mas agora com **uma onda quadrada na entrada e fc=200hz**:

- Meça $\mathbf{V_C}$ e $\mathbf{V_e}$ no DataStudio e salve os dados para uma freqüência tal que:
  - $\omega >> \omega_c$ (~15 vezes maior)
- Mostre com os dados obtidos que o sinal de saída é proporcional à integral do sinal de entrada:
  - Neste caso, como a entrada é um sinal quadrado, significa que a saída será um triângulo, certo?
  - Mostre que as "inclinações" teóricas (sua dedução) e medidas (na tela do osciloscopio) da onda triangular na saída são compatíveis

Tarefas 2 – Para Relatório

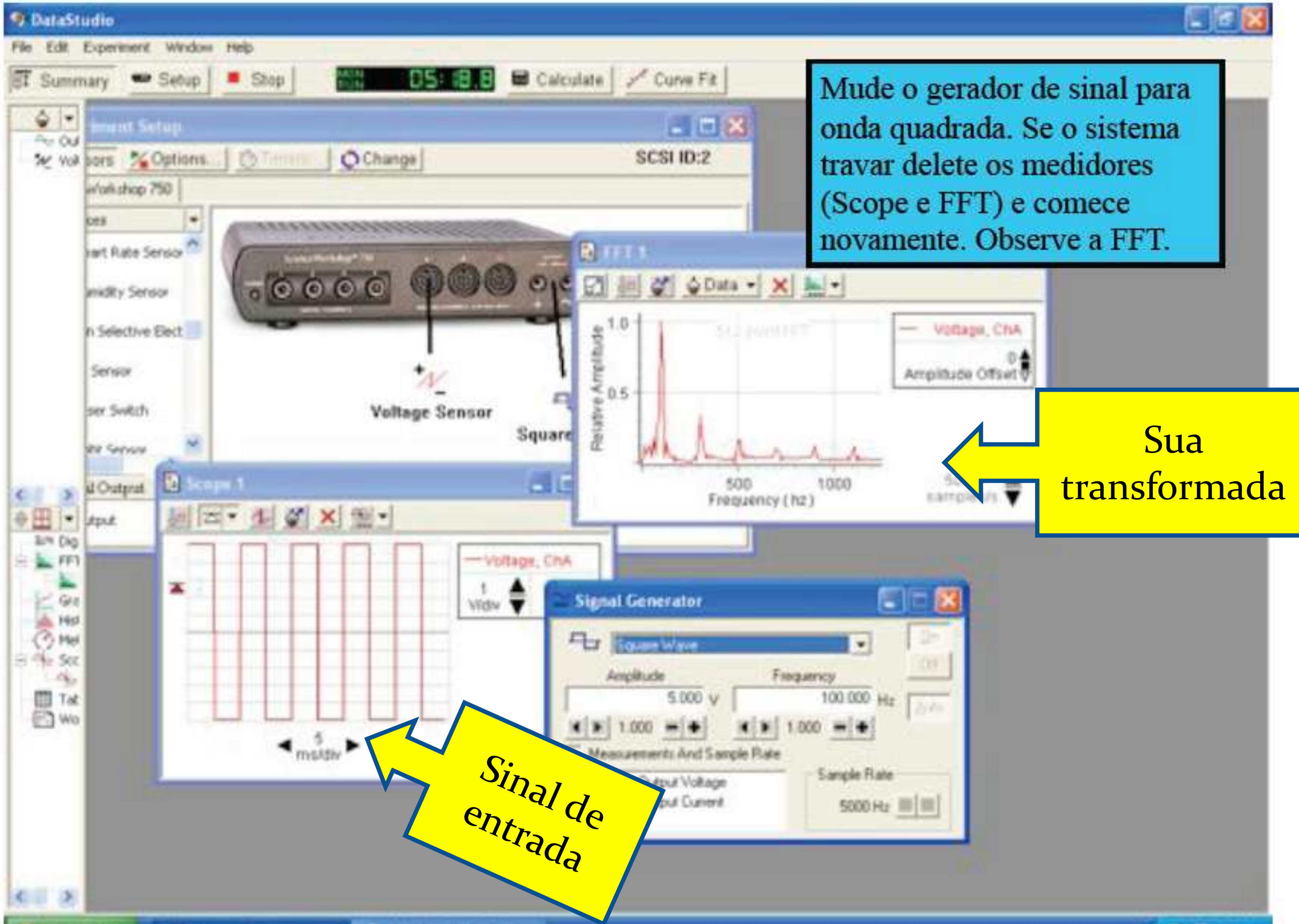
- Faça a análise de Fourier de uma **onda quadrada** no DataStudio. Fotografe e anote as amplitudes e frequências
  - Gráfico de **amplitude X freqüência**.
    - Lembre que deve usar a onda quadrada fornecida pela fonte do DataStudio para analisar a onda quadrada usando a função fft do mesmo (o gerador de áudio traz muito ruído, que o DataStudio não consegue eliminar, além do perigo de exceder a tensão máxima que a interface suporta e queimá-la)
- Faça a análise de Fourier da **onda triangular** na saída do circuito integrador. Fotografe e anote as amplitudes e frequências
  - Gráfico de **amplitude X frequência**.
- Compare ambas com a previsão teórica, quantitativamente. Comente.

Tarefa 3 - EXTRA

- Meça $\mathbf{V_C}$ e $\mathbf{V_e}$ também para:
  - $\boldsymbol{\omega \sim 2\,\omega_c}$
  - $\boldsymbol{\omega << \omega_c}$ (~ 3 vezes)

- Com essas medidas e com a medida de $\boldsymbol{\omega>>\omega_C}$, mostrar numericamente que $\mathbf{V_C(t)}$ pode ser obtido através da aplicação do ganho e da fase para cada freqüência que compõe a onda quadrada de entrada
- Compare a sua previsão-via-Fourier com a medida experimental de $\mathbf{V_C(t)}$.
  - Discuta o efeito da escolha do número de termos na série de Fourier no seu resultado

Circuito Integrador



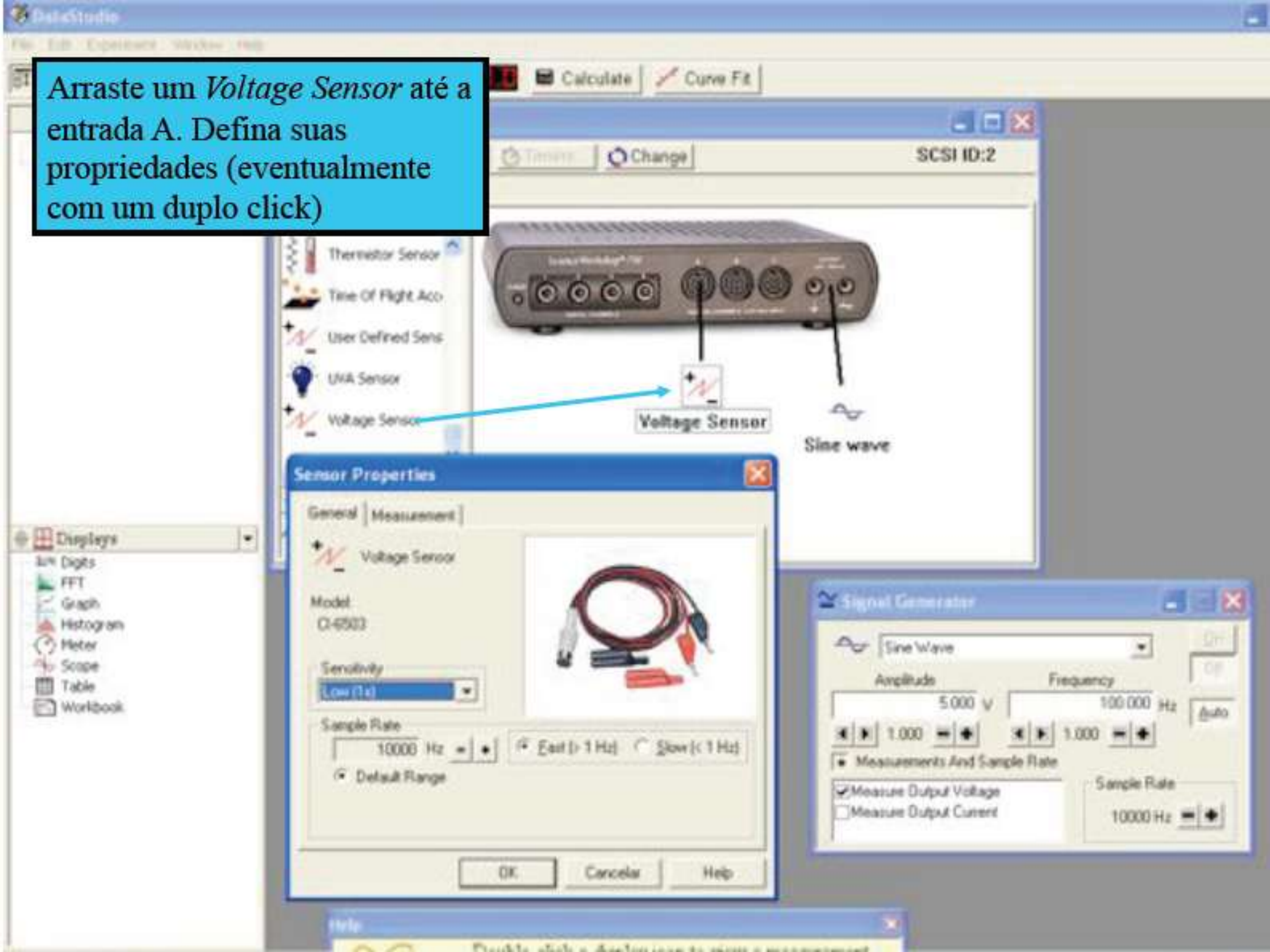
Ligue seu osciloscópio para controlar se a saída do 750 é de fato o que foi selecionado via software.

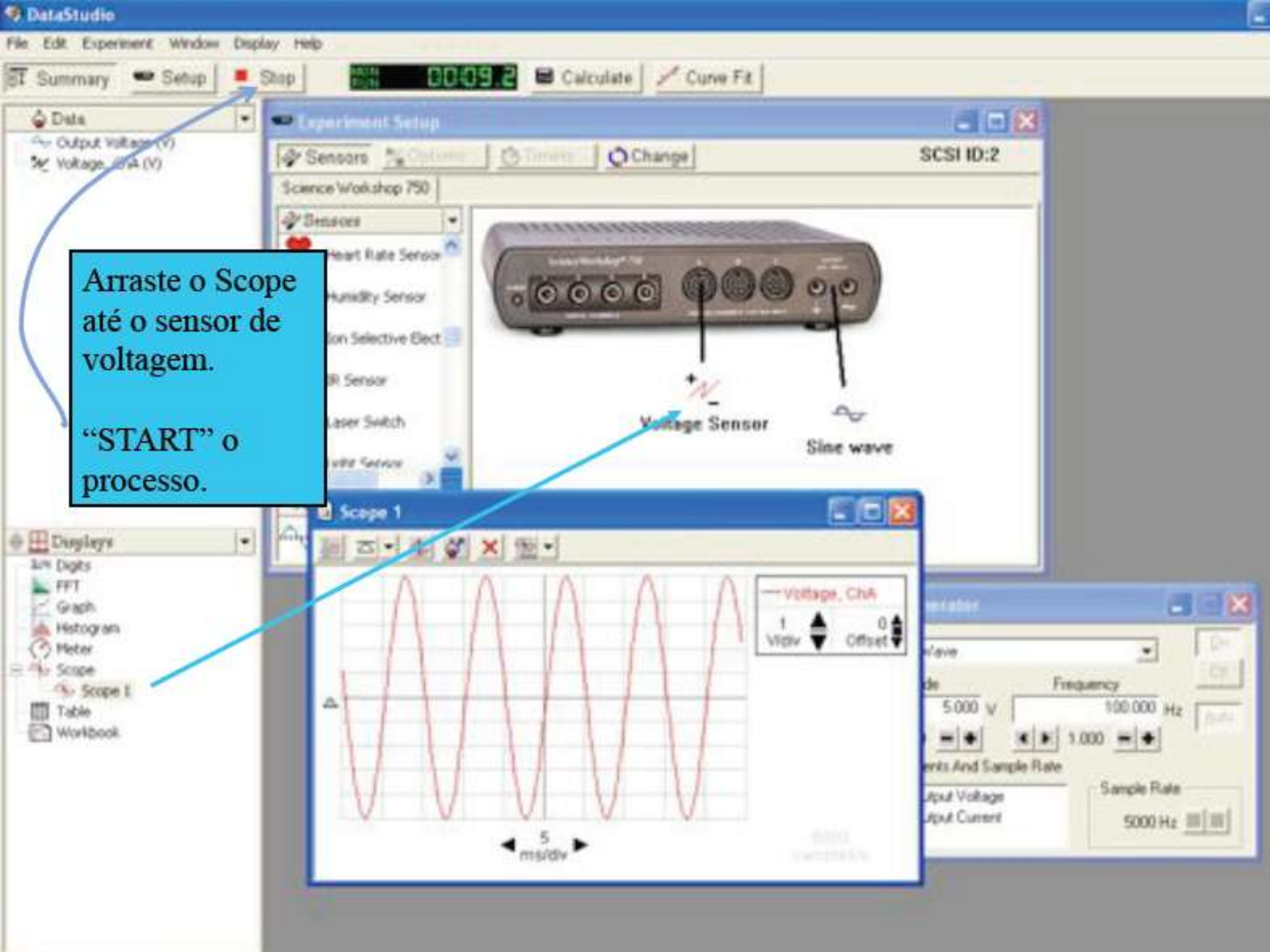
1) Ligue a interface PASCO 750 na tomada. Veja o LED power on.

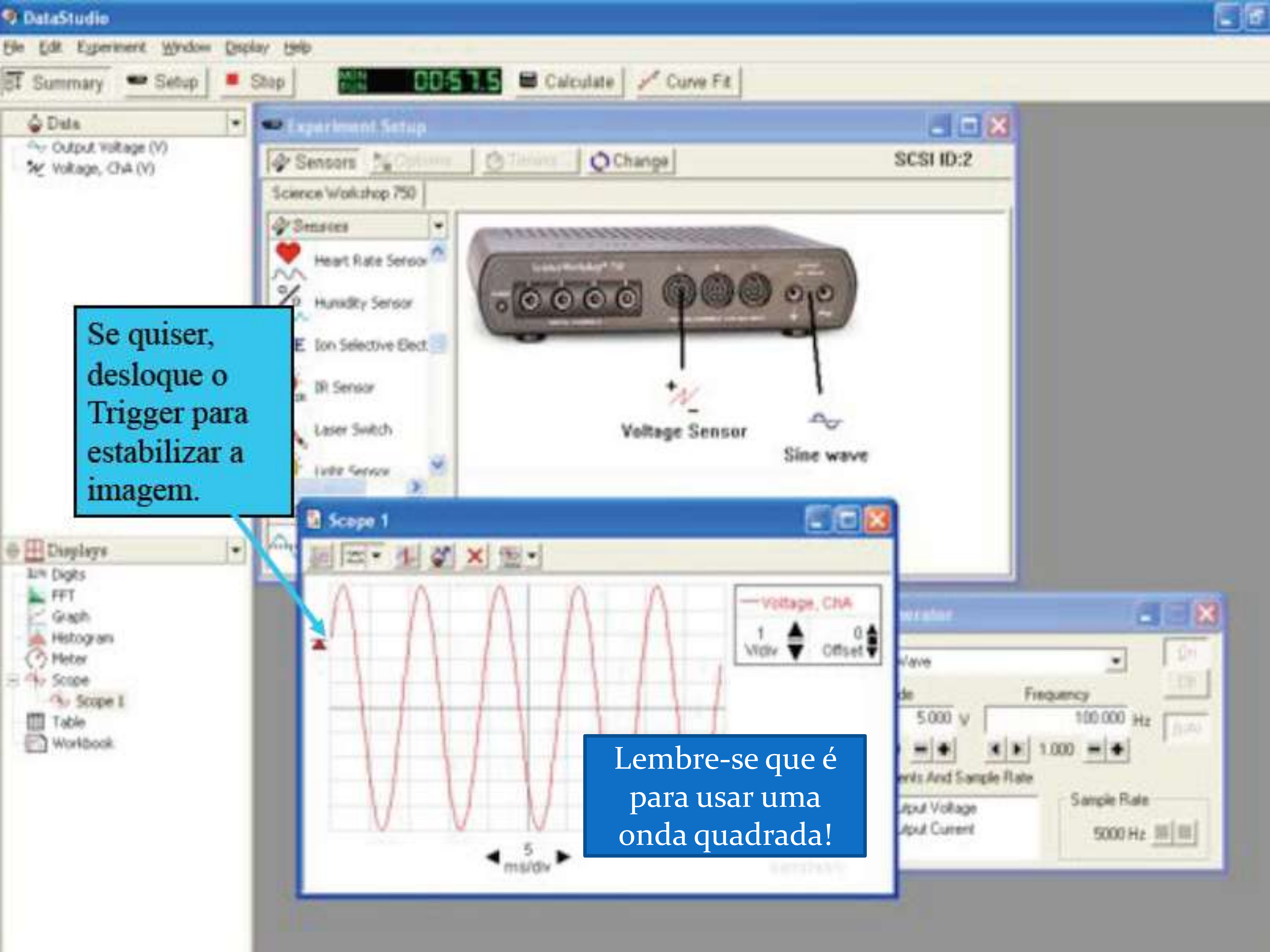
2) Conecte um adaptador para pino banana na **entrada** A, B ou C.

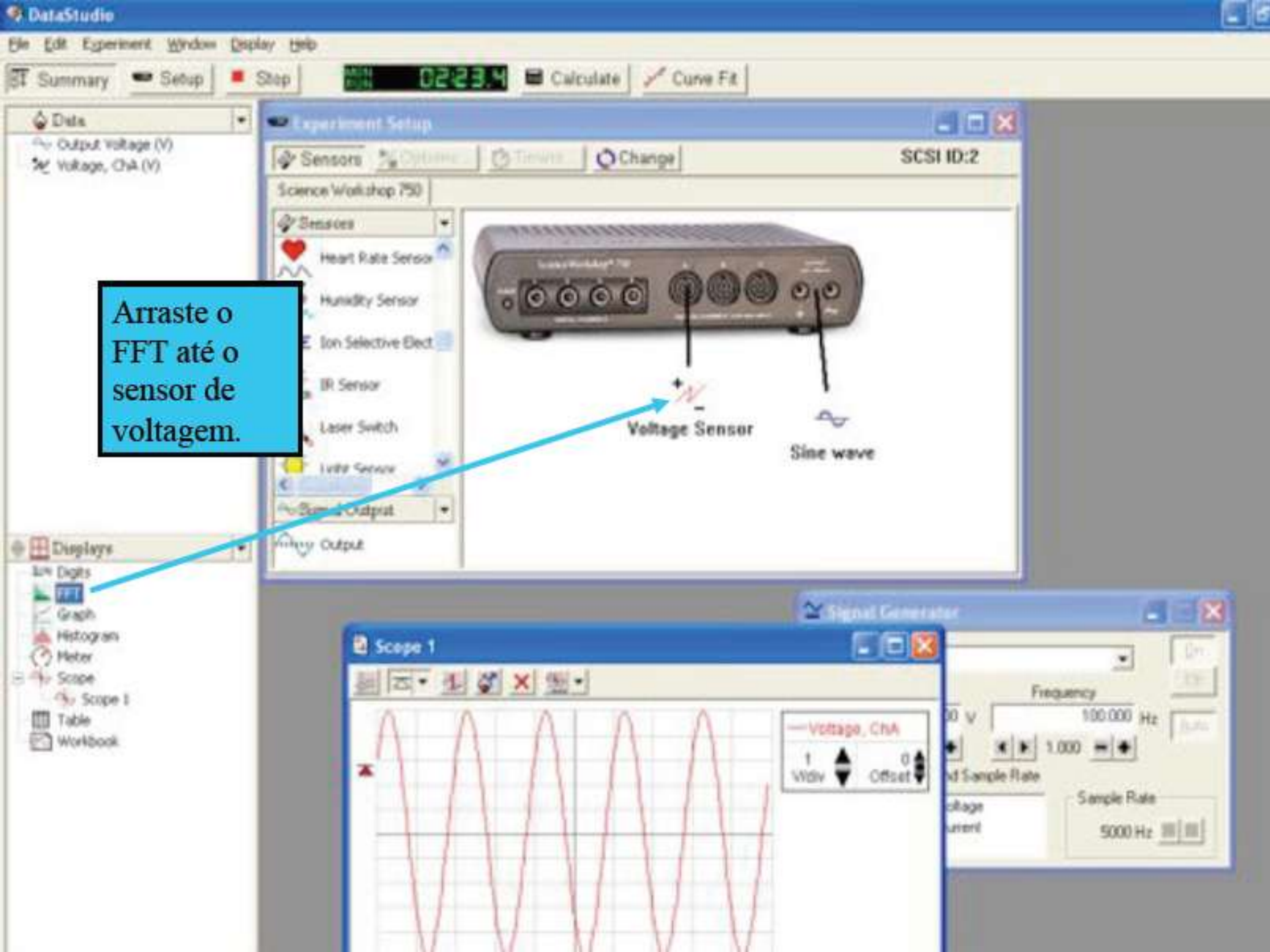
3) Conecte um par de fios com pino banana na saída *output*.

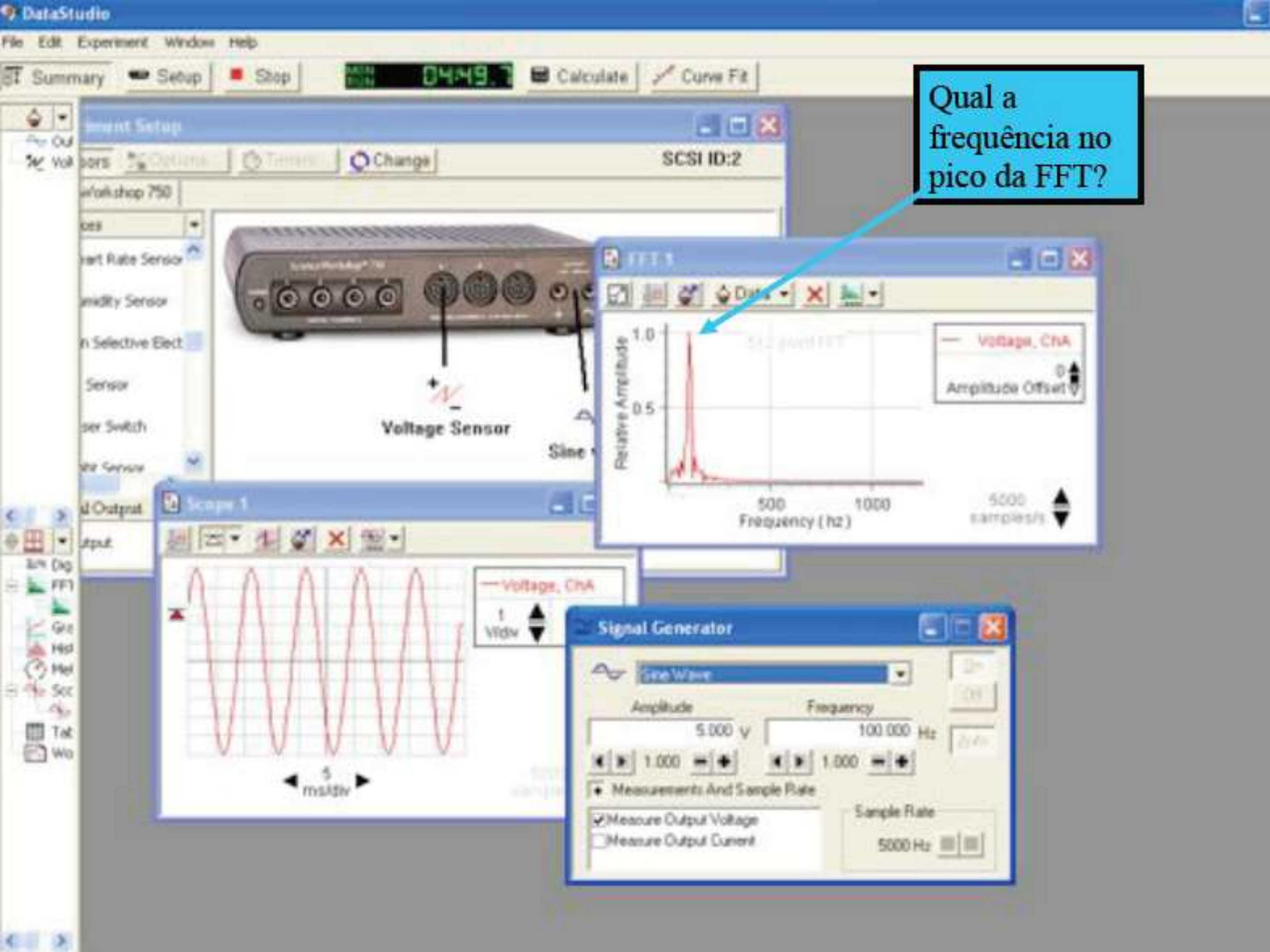
Arraste um *Voltage Sensor* até a entrada A. Defina suas propriedades (eventualmente com um duplo click)



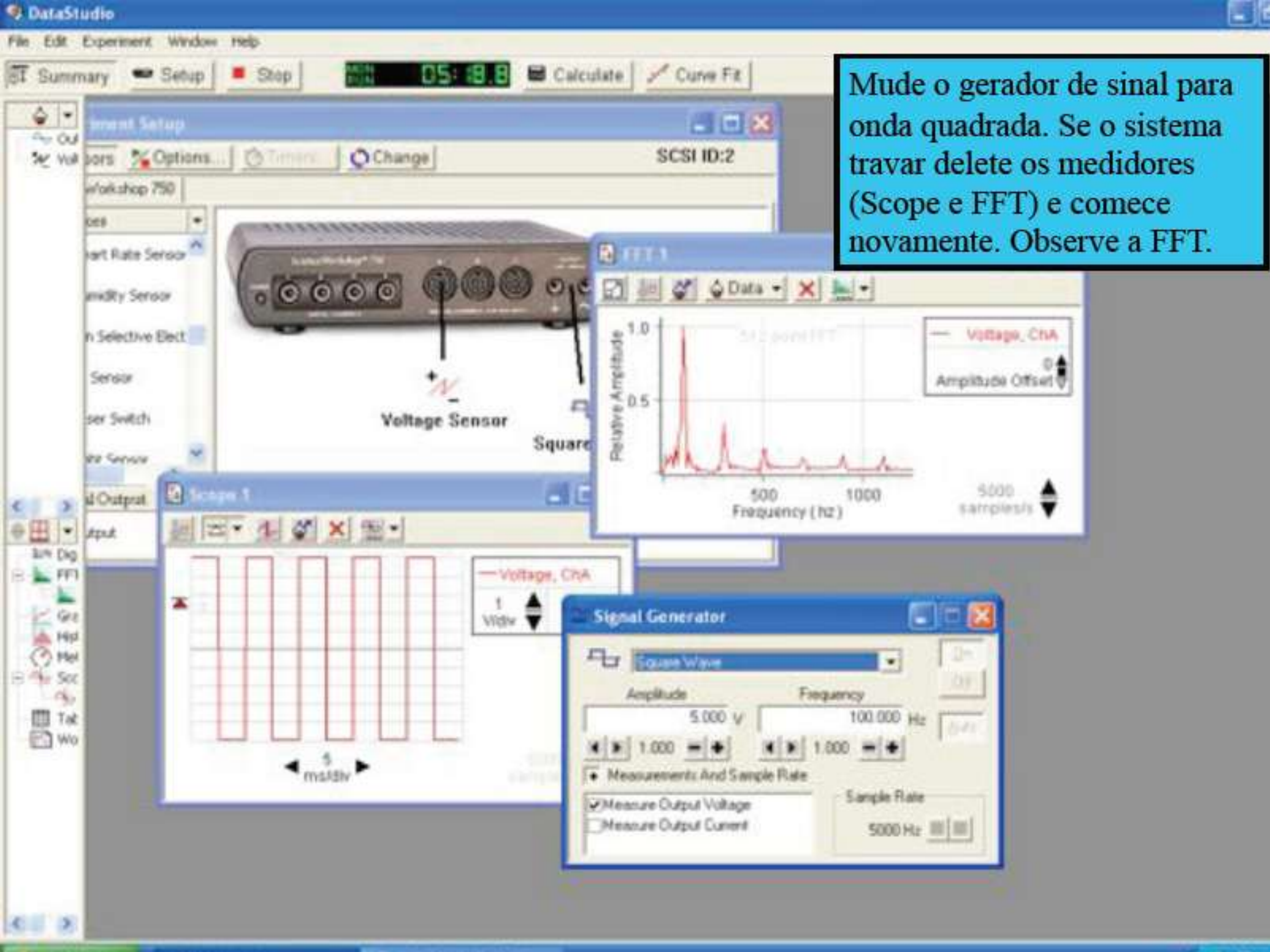

DataStudio
File Edit Experiment Window Display Help
Summary
Setup
Stop
00:09.2
Calculate
Curve Fit
Data
Output Voltage (V)
Experiment Setup
Sensors
Change
SCSI ID:2
Science Workshop 750
Heart Rate Sensor
Humidity Sensor
Ion Selective Elect
IR Sensor
Laser Switch
Arraste o Scope até o sensor de voltagem.
“START” o processo.
Voltage Sensor
Sine wave
Scope 1
Displays
Digits
FFT
Graph
Histogram
Meter
Scope
Scope 1
Table
Workbook
Voltage, ChA
V/div
Offset
5
ms/div
Frequency
5.000 V
100.000 Hz
1.000
Sample Rate
5000 Hz
Output Voltage
Output Current

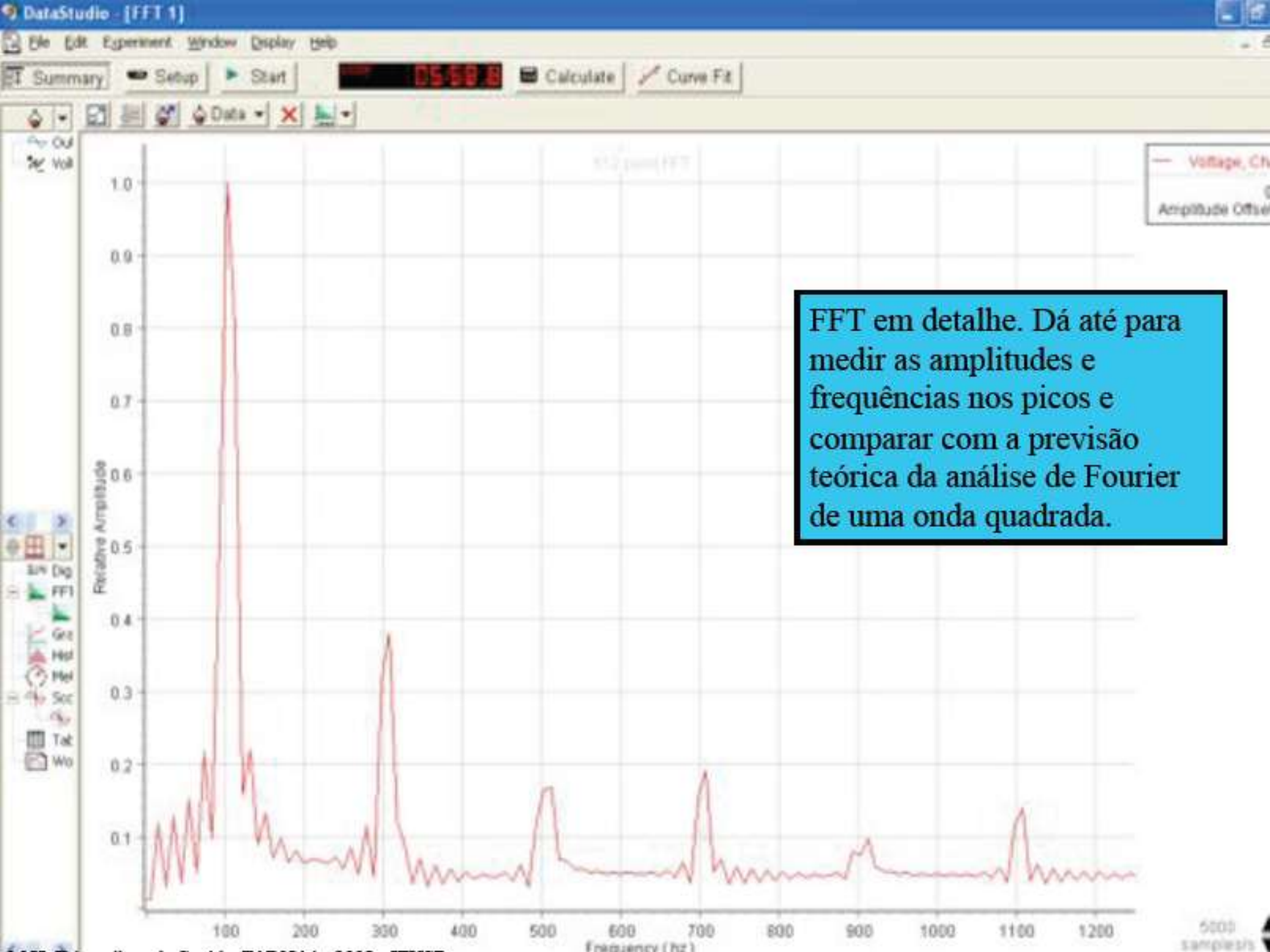

DataStudio
File Edit Experiment Window Display Help
Summary
Setup
Stop
Calculate
Curve Fit
Data
Output Voltage (V)
Voltage, ChA (V)
Experiment Setup
Sensors
Change
SCSI ID:2
Science Workshop 750
Heart Rate Sensor
Humidity Sensor
Ion Selective Elect
IR Sensor
Laser Switch
Voltage Sensor
Sine wave
Se quiser, desloque o Trigger para estabilizar a imagem.
Displays
Digits
FFT
Graph
Histogram
Meter
Scope
Scope 1
Table
Workbook
Scope 1
Voltage, ChA
1 V/div
0 Offset
5 ms/div
Frequency
5.000 V
100.000 Hz
1.000
Sample Rate
5000 Hz
Lembre-se que é para usar uma onda quadrada!


DataStudio
File Edit Experiment Window Display Help
Summary
Setup
Stop
Calculate
Curve Fit
Data
Output Voltage (V)
Voltage, ChA (V)
Experiment Setup
Sensors
Change
SCSI ID:2
Science Workshop 750
Heart Rate Sensor
Humidity Sensor
Ion Selective Elect
IR Sensor
Laser Switch
Output
Voltage Sensor
Sine wave
Arraste o FFT até o sensor de voltagem.
Displays
Digits
FFT
Graph
Histogram
Meter
Scope
Scope 1
Table
Workbook
Scope 1
Voltage, ChA
Offset
Signal Generator
Frequency
Hz
Sample Rate
5000 Hz


Qual a frequência no pico da FFT?
DataStudio
File Edit Experiment Window Help
Summary
Setup
Stop
Calculate
Curve Fit
SCSI ID:2
Change
Voltage Sensor
FFT 1
Relative Amplitude
1.0
0.5
500
1000
Frequency (hz)
Voltage, ChA
Amplitude Offset
5000 samples/s
Scope 1
Voltage, ChA
1 V/div
5 ms/div
Signal Generator
Sine Wave
Amplitude
Frequency
5.000 V
100.000 Hz
1.000
1.000
Measurements And Sample Rate
Measure Output Voltage
Measure Output Current
Sample Rate
5000 Hz

Mude o gerador de sinal para onda quadrada. Se o sistema travar delete os medidores (Scope e FFT) e comece novamente. Observe a FFT.




DataStudio - [FFT 1]
File Edit Experiment Window Display Help
Summary
Setup
Start
Calculate
Curve Fit
Data
Voltage, Ch
Amplitude Offse
FFT em detalhe. Dá até para medir as amplitudes e frequências nos picos e comparar com a previsão teórica da análise de Fourier de uma onda quadrada.
Relative Amplitude
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000 1100 1200
Frequency (hz)