Física Experimental IV

Aula 1 - Experiência 1
Circuitos CA e Caos
2013

Prof. Antonio Domingues dos Santos
adsantos@if.usp.br
Ramal: 6886
Mário Schemberg, sala 205

Prof. Leandro Barbosa
lbarbosa@if.usp.br
Ramal: 7157
Ala1, sala 225

http://lababerto.if.usp.br/

Prof. Henrique Barbosa
(**coordenador**)
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
carlin@dfn.if.usp.br
Ramal: 6820
Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br
Ramal: 7016
Basilio, sala 101

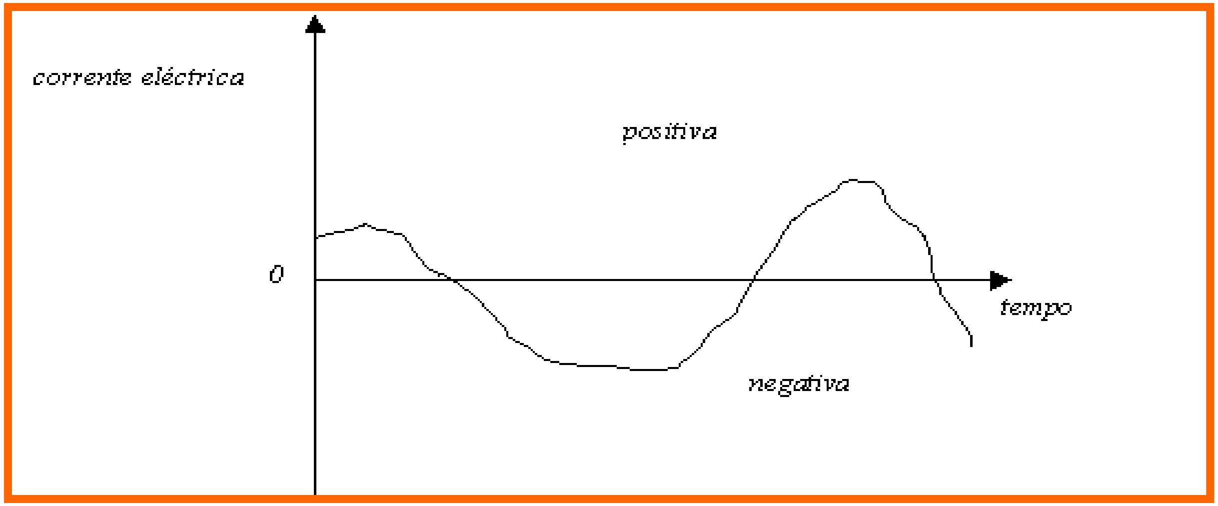
Objetivos

- Estudar circuitos elétricos em corrente alternada com a finalidade de explorar fenômenos caóticos
- Aprender algumas técnicas avançadas de processamento de sinais e análise de dados

- 5 aulas
  - Noções de CA, filtro RC
  - Circuito integrador e análise de Fourier
  - Ressonância de um circuito RLC simples
  - Funções caóticas: mapa logístico
  - Caos em circuito RLD

Tensões e Correntes Alternadas

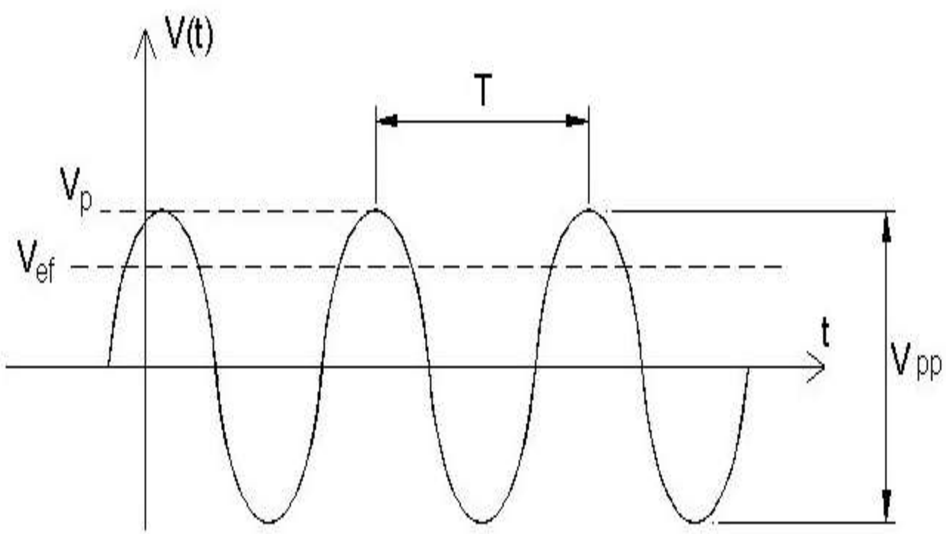
- Tensão alternada: qualquer tensão que varia no tempo



- Na prática trabalhamos com tensões harmônicas simples
  - Veremos no lab4 que **qualquer tensão dependente do tempo é uma superposição de tensões harmônicas simples**

Tensões Harmônicas Simples

- Aquelas descritas por uma função harmônica simples de freqüência bem definida, ou seja:



$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0)$$

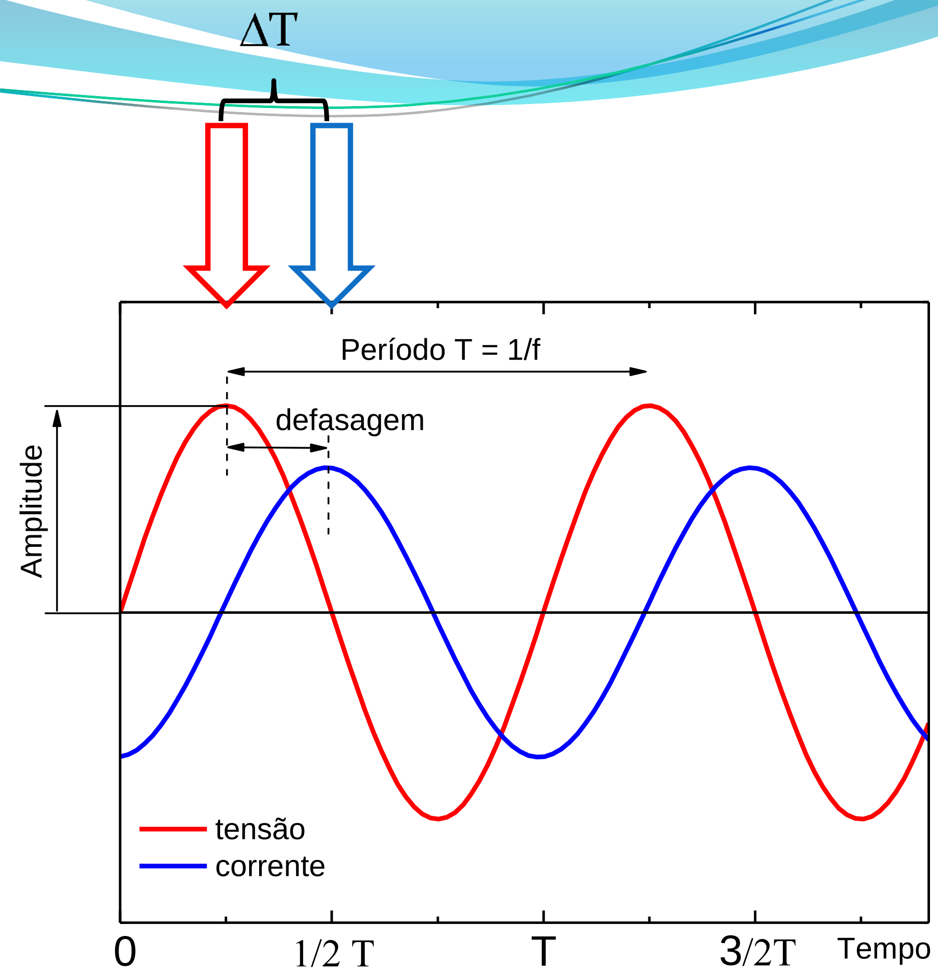
$$\omega = 2\pi f \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$V_{PP} = 2V_p \qquad V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

V_P é a tensão máxima ou tensão de pico ou amplitude, ω é a freqüência angular e ϕ_o é a fase da tensão alternada no instante **t=o**

A fase

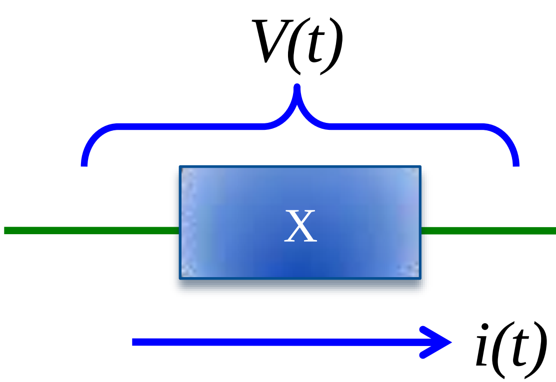
- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não estão necessariamente em fase:



$$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

$$V(t) = V_P \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$

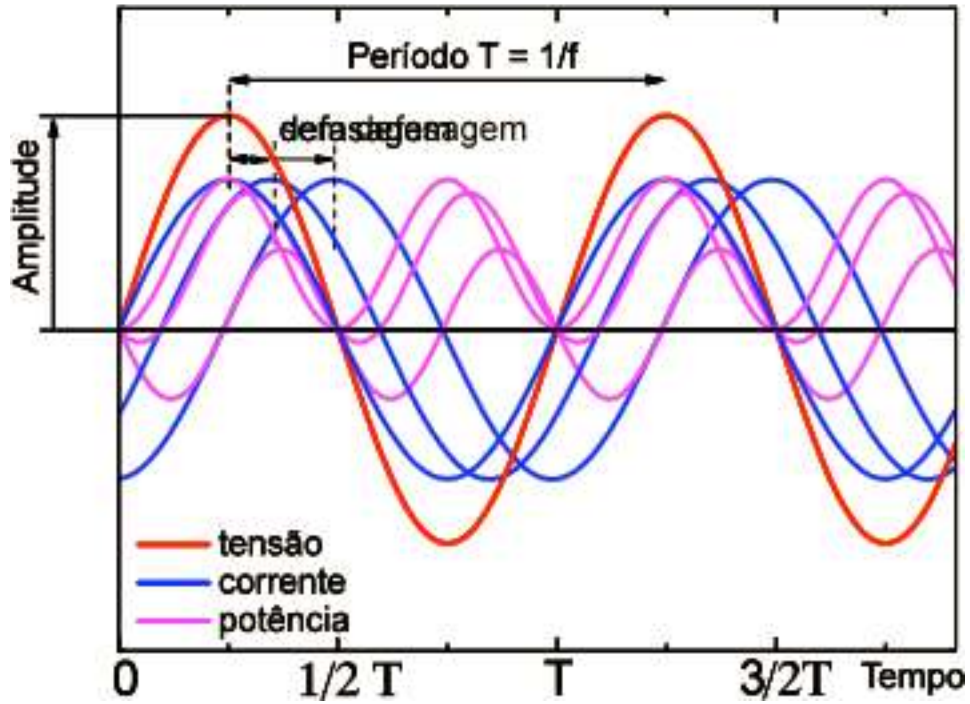


Potência Instantânea

- Instantaneamente:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = V_P i_0 \sin(\omega t + \phi)\sin(\omega t)$$



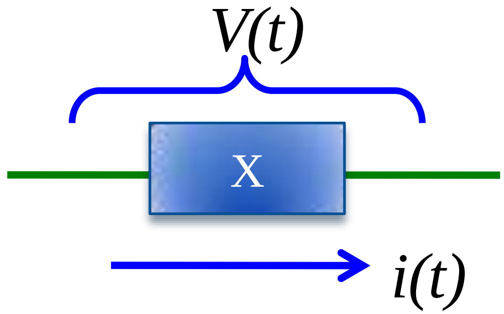
- Depende da fase entre corrente e tensão e pode ser negativa!

  Potência positiva é aquela consumida

  Potência negativa é aquela fornecida

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

Em um resistor ôhmico simples, a relação entre tensão e corrente é:



$$R = \frac{V_P}{i_P} = cte$$

$$i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

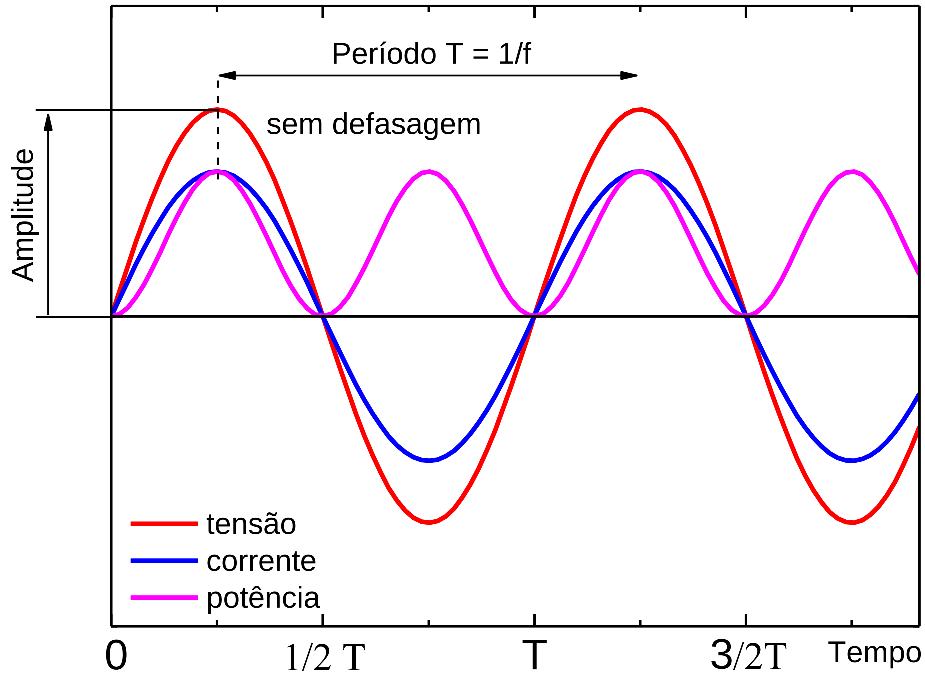
$$V(t) = R \cdot i(t) = R i_P \cos(\omega t)$$

A fase entre tensão e corrente é nula

Exemplo 1: Resistor Ôhmico

- A potência instantânea é:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = R \cdot i_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) > 0, \text{ sempre}$$



•A potência varia no tempo, mas é sempre positiva o que significa que o resistor <u>sempre</u> consome potência

Exemplo 2: Capacitor Ideal

Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Além disso, carga e corrente estão relacionados

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

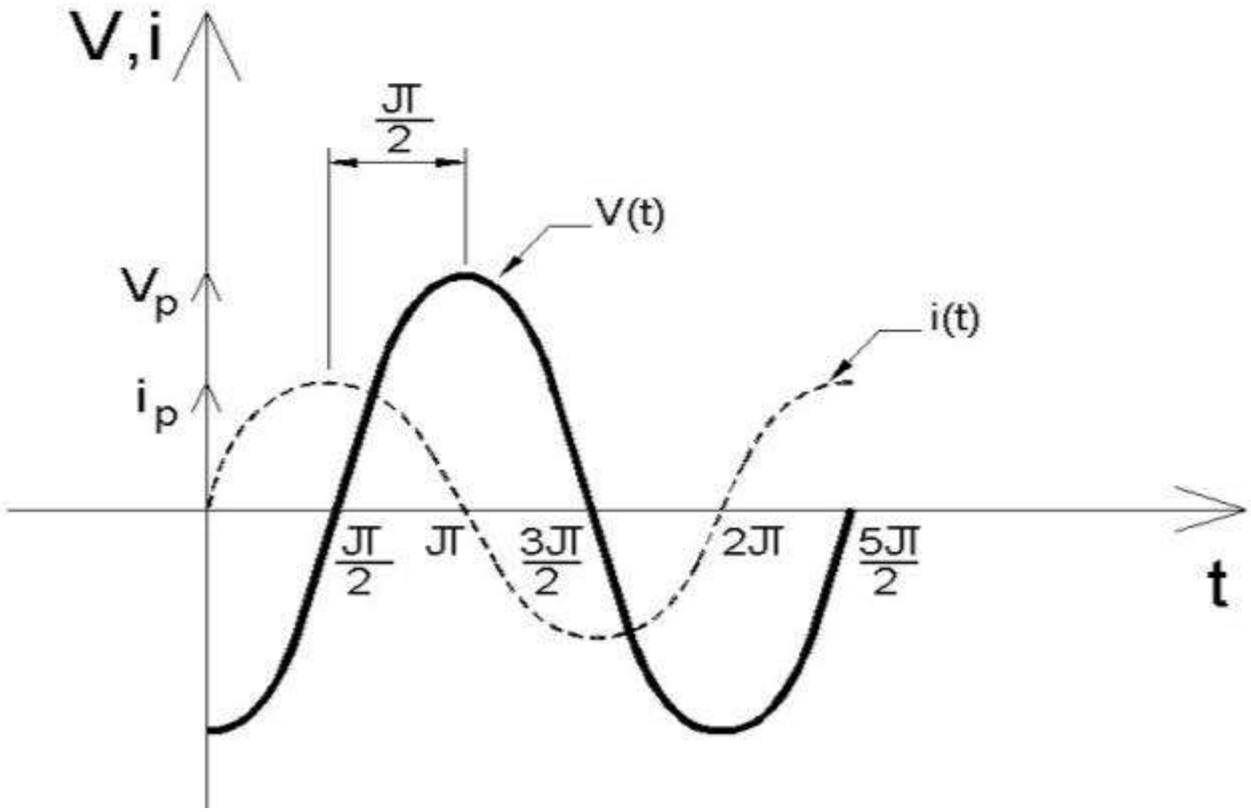
A fase não é nula!

Portanto:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$i(t) = -\omega C V_p \sin(\omega t) = \omega C V_p \cos(\omega t - \pi / 2)$$

Exemplo 2: Capacitor Ideal



a corrente está adiantada de π/2 em relação à tensão aplicada ao capacitor (Atenção: a defasagem de π/2 é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).

Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como:

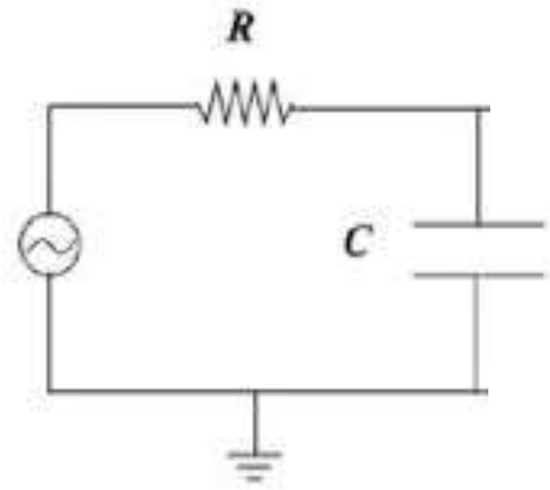
$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = \frac{i_0^2}{\omega C} \cos(\omega t) \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Em circuitos de corrente alternada, muitos elementos possuem fases não nulas entre corrente e tensão. Nestes casos, o formalismo trigonométrico torna-se bastante complexo e inconveniente.

Exemplo 3: circuito RC

- Capacitor e resistor em série com uma fonte de tensão alternada:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \sum_{malha} V_i = 0$$

$$V_e(t) = V_R(t) + V_C(t) \Rightarrow V_e(t) = R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} \quad \text{sendo} \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$V_e(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \rightarrow V_e(t) = RC \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

Como resolver?

$$V_e = \frac{1}{\omega_0} \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) \quad \text{com} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

((Números Complexos))

$$\hat{C} = a + b\,j \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C} = C\,e^{j\alpha} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega\, e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas nesta notação são apenas multiplicações e divisões

Formalismo Complexo

- Este formalismo é construído de tal forma a facilitar todos os cálculos que envolvem tensões alternadas.
- Vamos definir as tensões e correntes complexas como sendo:

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \qquad \Rightarrow \qquad V(t) = \text{Re}\{\hat{V}(t)\} = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)} \qquad \qquad \quad i(t) = \text{Re}\{\hat{i}(t)\} = i_0 \cos(\omega t + \phi_1)$$

Impedância Complexa e Real

A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t+\phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t+\phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0-\phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

Z_0 é a impedância REAL do elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a tensão e corrente causada pelo elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e Reatância

- Da definição de impedância complexa:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{jf}$$

- Podemos escrever também que:

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(f) + jZ_0 \sin(f)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

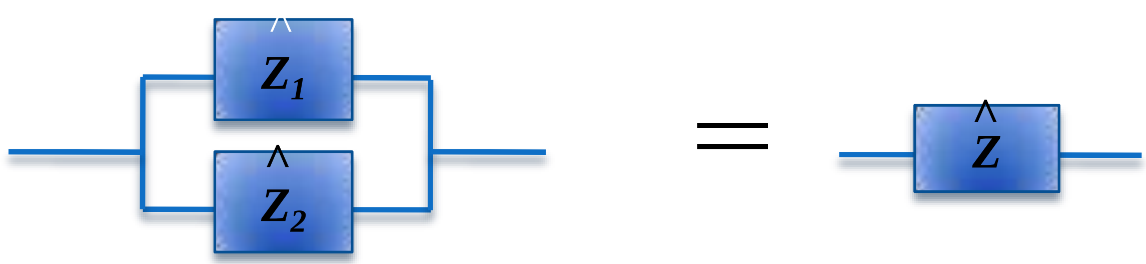
- E reatância deste bipolo (X):

$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

- As grandes vantagens deste formalismo são:
  - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
    - Multiplicações e divisões de exponenciais
  - Associações de bipolos tornam-se simples:
    - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$

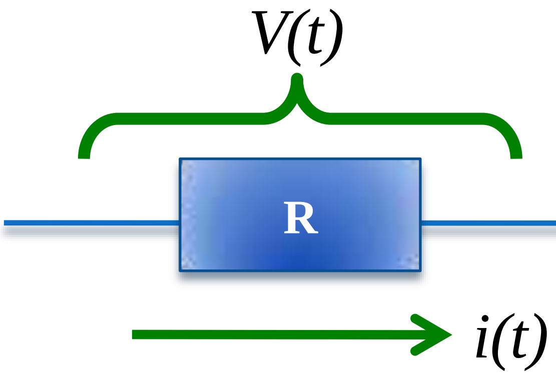


$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}$$

Aplicação 1: Resistor

- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Mas sabemos que $R = V/i$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

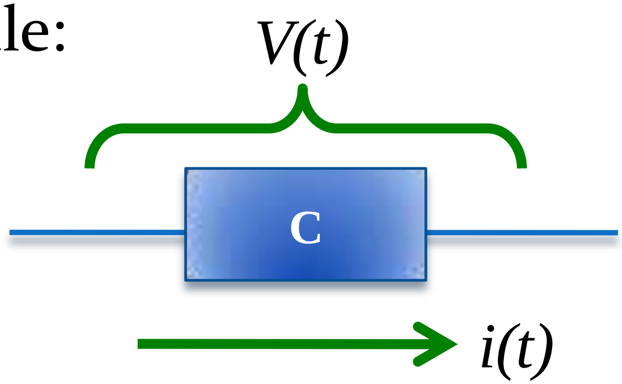
$$\hat{Z} = Z_0 e^{jf} = R \quad \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

Aplicação 2: Capacitor

- Sabemos (do começo da aula) que: $V(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$
- Se a corrente complexa for dada por: $\hat{i}(t) = i_0 e^{jwt}$
- Fica fácil demonstrar que: $\hat{V}(t) = -\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$
- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\frac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$

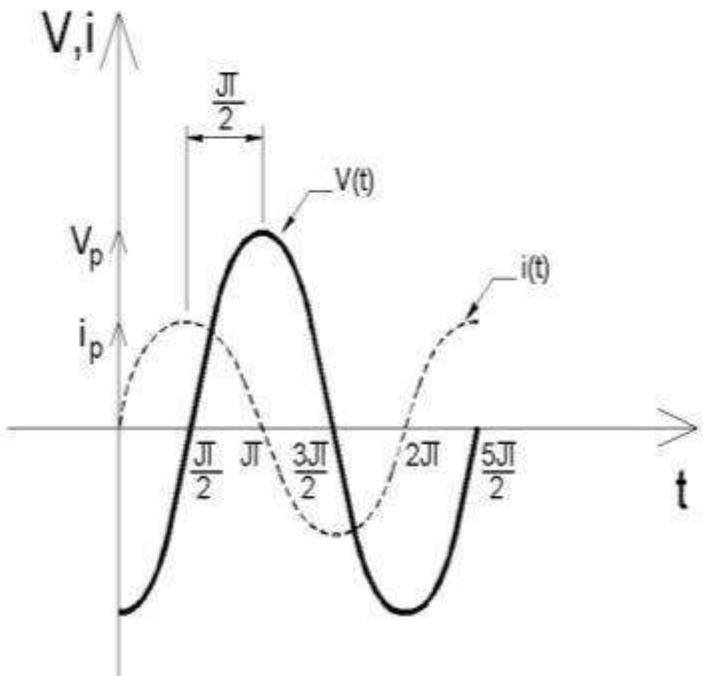


Aplicação 2: Capacitor

- Ou seja: $\hat{Z} = -\dfrac{j}{\omega C}$
- Mas lembrando que: $\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$
- Comparando as duas expressões temos:

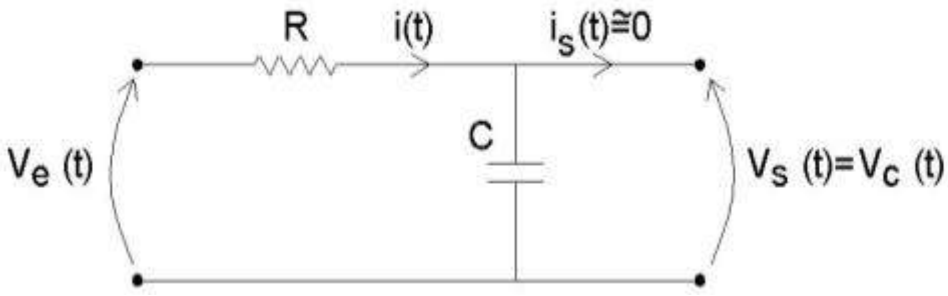
$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de π/2 em relação à corrente



Aplicação 3: circuito RC

- Seja o circuito ao lado:



- A tensão no capacitor é:

$$\hat{V}_C = \hat{i} \cdot \hat{Z}_C$$

- A tensão de entrada é:

$$\hat{V}_e = \hat{Z}_{total} \cdot \hat{i} = (\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}$$

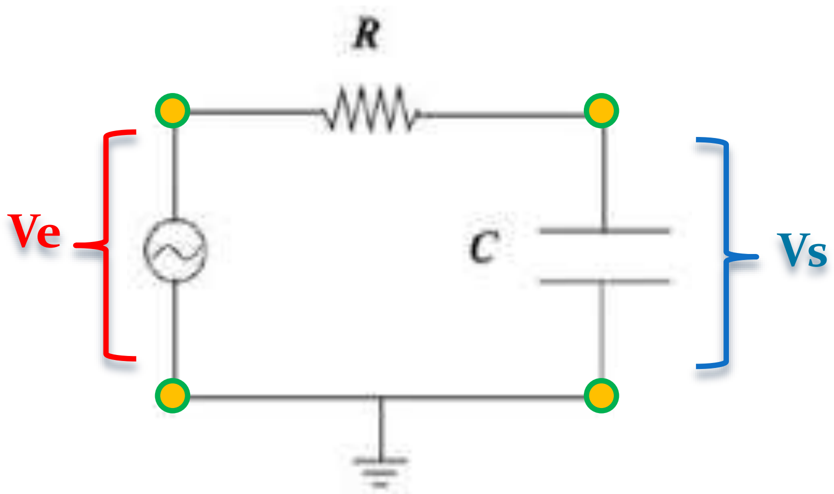
- E o “ganho” no circuito é dado por:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = \frac{\hat{Z}_C \cdot \hat{i}}{(\hat{Z}_R + \hat{Z}_C) \cdot \hat{i}} = \frac{-\frac{j}{\omega C}}{(R - \frac{j}{\omega C})} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

MUITO mais fácil do que resolver a equação diferencial....

$$V_e = \frac{1}{\omega_0}\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t)$$

Em termos de quadrupolos:



- Sinal de entrada = V_e
- Sinal de saída = V_s

A parte real do ganho muda a amplitude do sinal:

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}^* \hat{G}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_C)^2}}$$

E a parte imaginária introduz uma fase

$$\phi_G = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[\hat{G}]}{\mathrm{Re}[\hat{G}]}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} V_e(t) &= V_e \cos(\omega t) \\ V_s(t) &= V_e G_0 \cos(\omega t + \phi_G) \end{aligned}}$$

Quadrupolo RC - Baixa frequência

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{\omega_C^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$$

- Portanto, o ganho real do quadripolo **RC**, <u>depende da freqüência</u> da tensão alternada a que ele está submetido. No caso em que essa <u>freqüência é baixa em relação a **ω_c**</u>: $\omega \ll \omega_C$, o termo (ω^2/ω_C^2), fica muito pequeno se comparado à unidade → o ganho é praticamente <u>igual a **1.**</u>

Quadrupolo RC – Alta frequência

- Se a freqüência for alta, ou seja, $\omega >> \omega_C$, o termo (ω^2/ω_C^2) é tão grande, que o algarismo **1**, no denominador da fórmula pode ser desprezado e o ganho é praticamente igual à ω_C/ω. Esse número, porém, é muito pequeno o que significa que para **freqüências altas a tensão de saída é muito menor que a tensão de entrada.**

$$\omega >> \omega_C \rightarrow G_0 \approx \omega_C/\omega << 1$$

Quadruplo RC - Resumo

- Resumindo: para

$$\left.\begin{array}{l} \omega \ll \omega_C \rightarrow G_0 \approx 1 \\ \\ \omega \gg \omega_C \rightarrow G_0 \approx (\omega_C/\omega) \ll 1 \end{array}\right\}$$

só passam as freq baixas comparadas a ω_C

- O dispositivo está selecionando freqüências!

ele é um filtro passa-baixa

Medidas da Semana

- Do ganho complexo se extrai o real:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_S}{\hat{V}_e} = G_0 e^{j\phi_G}$$

Sendo: $\omega_C = \dfrac{1}{RC}$

R e C podem ser medidos e há valores nominais

$$G_0 = \frac{V_S^0}{V_e^0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}$$

$$\phi_G = \omega \cdot \Delta T_{S-e} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

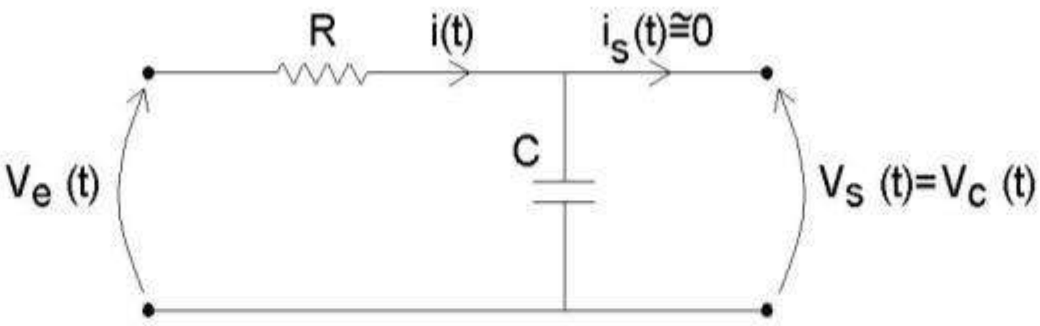
Tensões são medidas c/ osciloscópio

A freqüência também

Intervalo de tempo entre duas tensões também é mensurável

Para esta aula

- Vamos estudar o filtro **RC**:

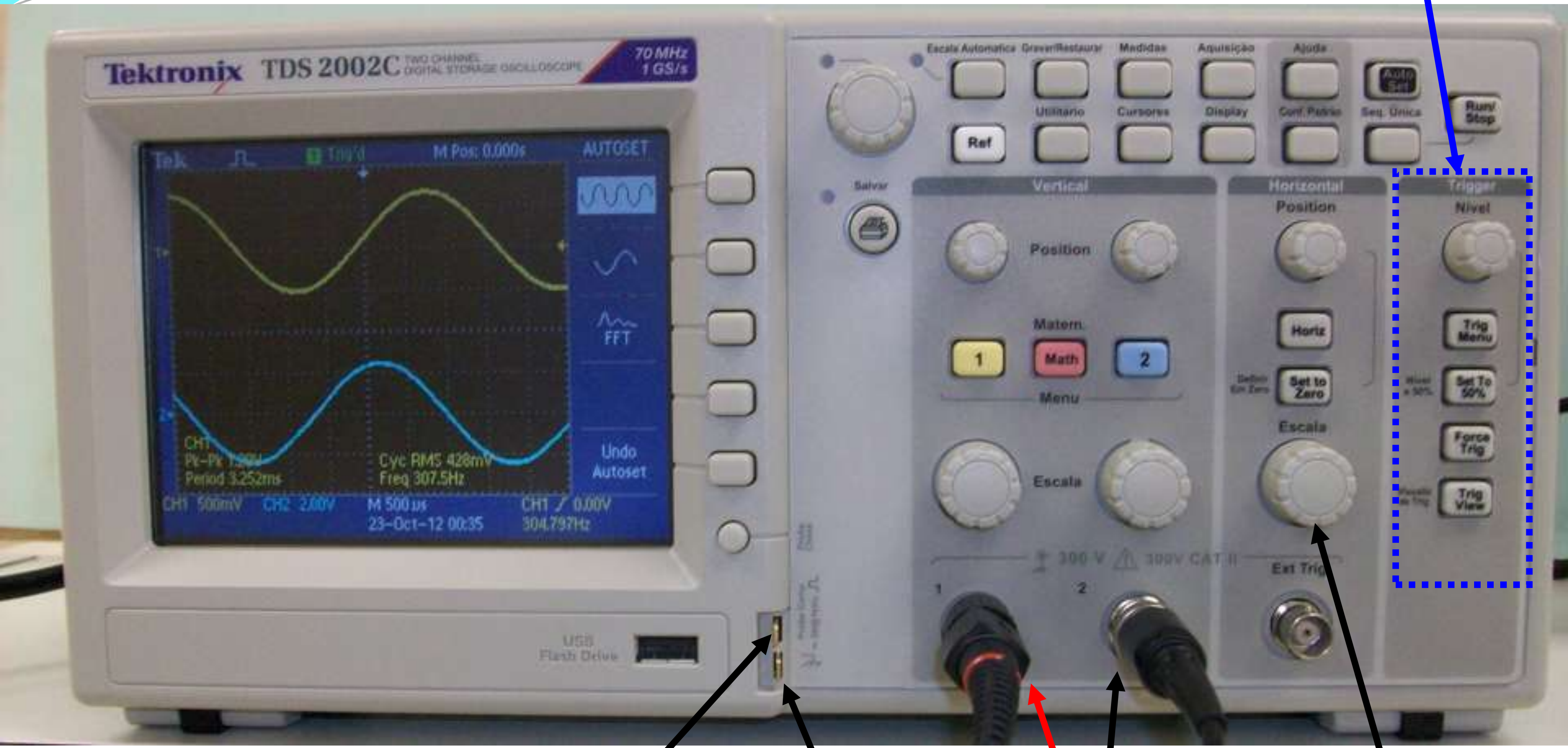


- **Objetivos:**
  - Obter experimentalmente o ganho (G_0 e Φ_G) em função da freqüência (ω) e comparar com a previsão teórica.

Para isto é preciso conhecer **R** e ***C***.
Não confiar nos valores nominais.

Osciloscópio

gatilho (trigger)



referência 5V

terra

canal 1

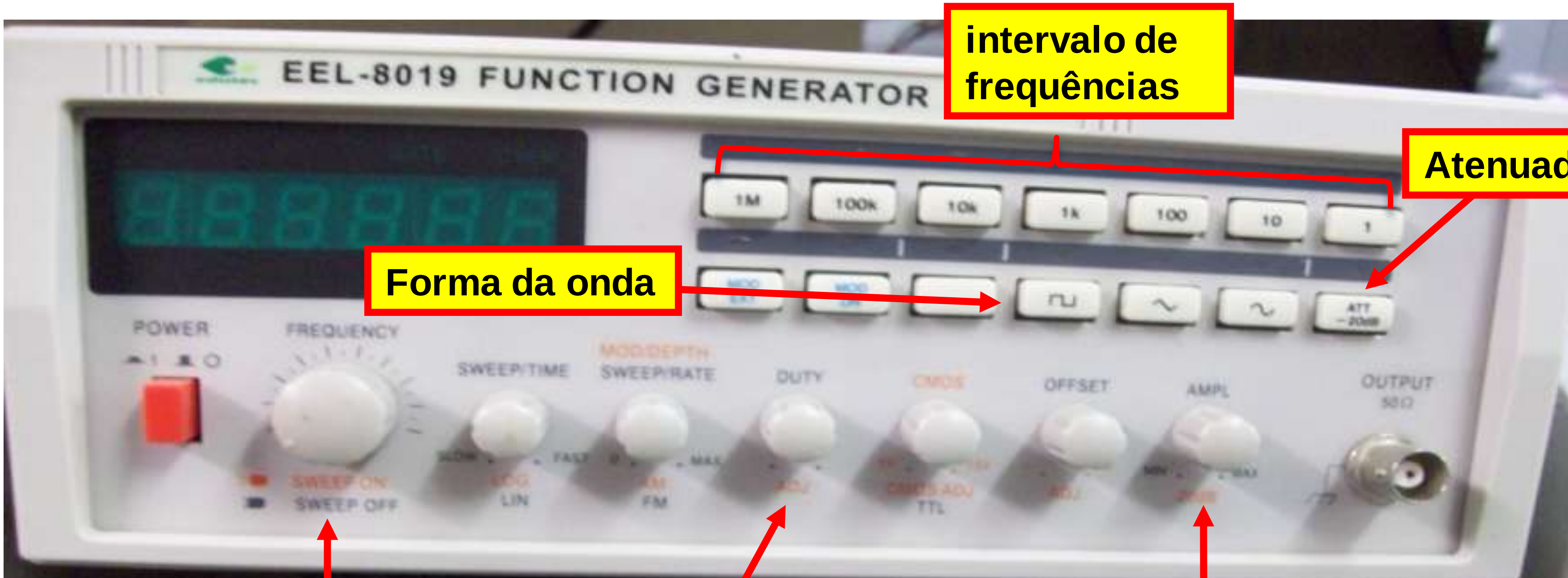
canal 2

varredura (horizontal)

Os terras das pontas de prova são o mesmo ponto dentro do aparelho

A ponta de prova tem atenuador que pode ser alterado (muda também a impedância)

Gerador de áudio



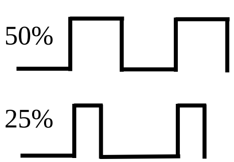
intervalo de frequências

Atenuador

Forma da onda

Frequência ajuste

Duty cycle Ajuste

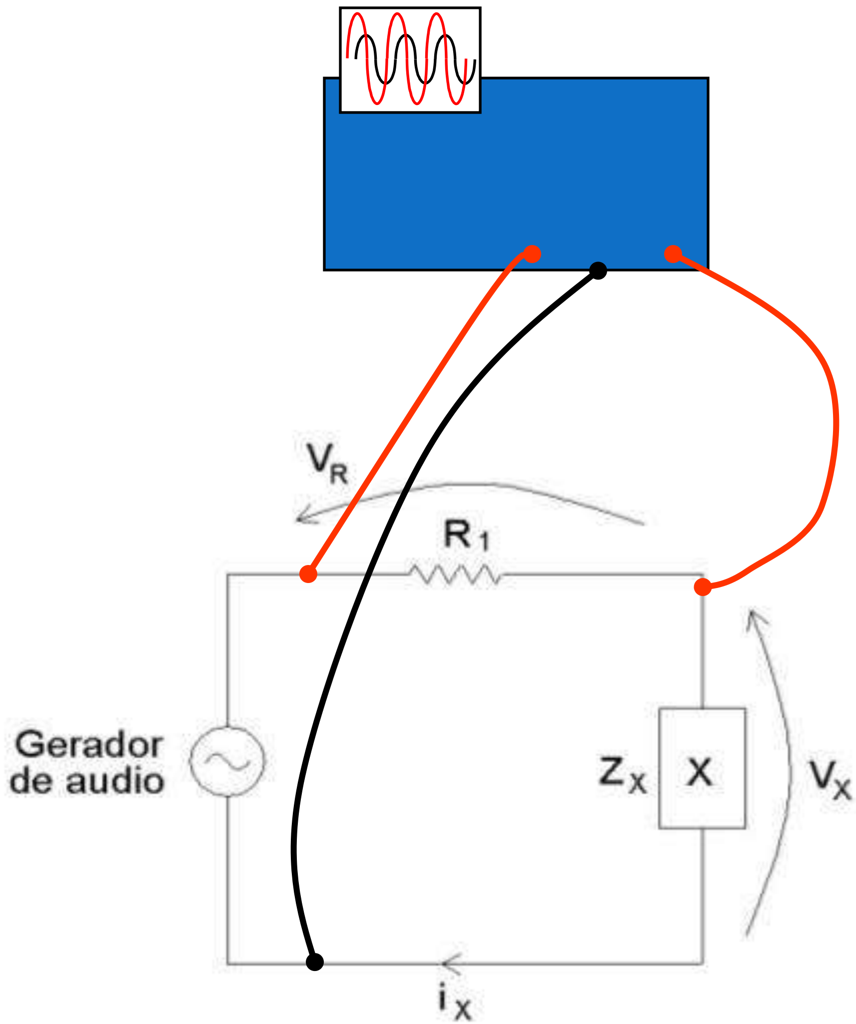


Amplitude Ajuste

Gerador de áudio: parte de trás

Cuidados Experimentais

- Instrumentos de medida:
  - Osciloscópio
    - Canal 1: Ve
    - Canal 2: Vc
  - Cuidado com ruídos
    - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído
  - Não confundir freqüência temporal (f) com freqüência angular (w)



Tarefas 1 – Para a Síntese

Montar um circuito RC com freqüência de corte ~1000Hz, por exemplo com 330Ω e 0.47μF. Usando um **sinal de entrada senoidal** e $V_{saida}=V_C$ fazer:

- Gráfico de G_0 em função de ω
  - Comparar com a curva teórica
  - Fazer os ajustes necessários e tratamento estatístico,
    - ou seja, ajuste não linear por mínimos quadrados e determinação da frequência de corte experimental
  - ω_c experimental é compatível com o teórico? Sim, não, porque? Caso não seja, a que se deve, R ou C?
- Lembre-se de medir valores $\omega \ll \omega_c$ até $\omega \gg \omega_c$ para poder fazer um bom ajuste.

Tarefas 2 – Para o Relatório

Montar um circuito **RC** com freqüência de corte ~1000Hz, por exemplo com 330Ω e 0.47μF. Usando um **sinal de entrada senoidal** e $\mathbf{V_{saida} = V_C}$ fazer:

- Gráfico de ϕ_G em função de ω:
  - Comparar com o esperado teoricamente para o capacitor
  - Fazer ajustes necessários e tratamento estatístico
- Faça as medidas esta semana! Mas os resultados/análise da fase (ϕ_G) serão cobrados apenas no relatório.