

Seletor de Velocidades

<http://lababerto.if.usp.br>

Física Experimental 3
Aula 5: Experiência 2

Espectrômetro de massa: calibração

Prof. Antonio Domingues dos Santos
adsantos@if.usp.br

Ramal: 6886

Mário Schenberg, sala 205

Prof. Leandro Barbosa
lbarbosa@if.usp.br

Ramal: 7157

Ala1, sala 225

Profa. Eloisa Szanto
eloisa@dfn.if.usp.br

Ramal: 7111

Pelletron

Prof. Henrique
Barbosa
hbarbosa@if.usp.br

Ramal: 6647

Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
nelson.carlin@dfn.if.usp.br

Ramal: 6820

Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br

Ramal: 7016

Basílio, sala 101

Lembrete:


Pergunta da semana

- Entreguem agora a pergunta da semana e lembrem-se de anotar o nome do seu professor e do seu grupo!!

Exp. 2 – Seletor de Velocidades

PROGRAMAÇÃO

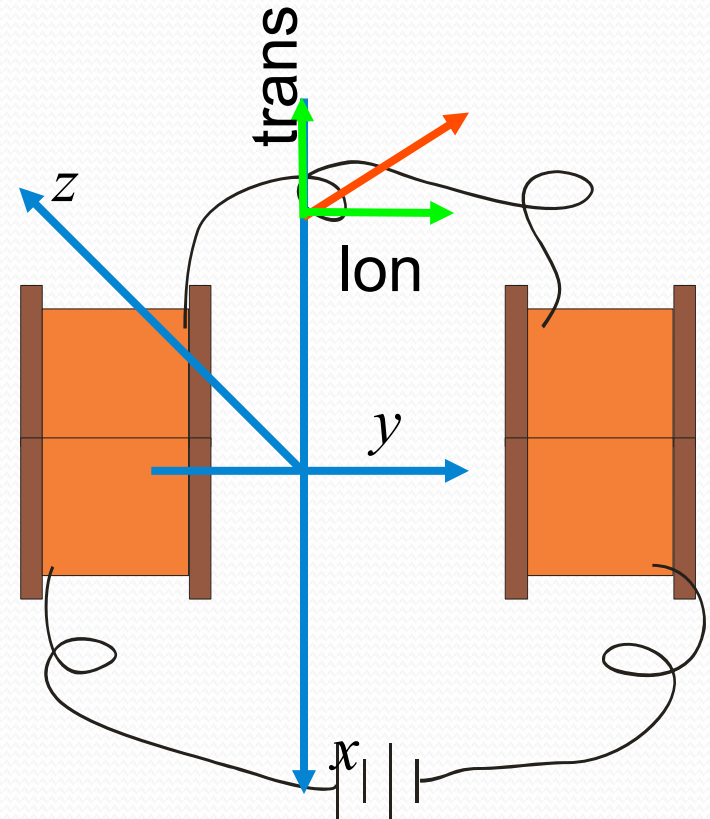
- Semana 1
 - Movimento em campo elétrico
- Semana 2
 - Simular o campo elétrico e modelo para o campo elétrico
- Semana 3
 - Movimento em campo magnético
- Semana 4
 - Mapear campo magnético e modelo para o campo magnético
- Semana 5
 - Espectrômetro de massa: calibração
- Semana 6
 - Espectrômetro de massa: trajetórias e resolução



**DISCUSSÃO dos dados do
mapeamento do campo magnético**

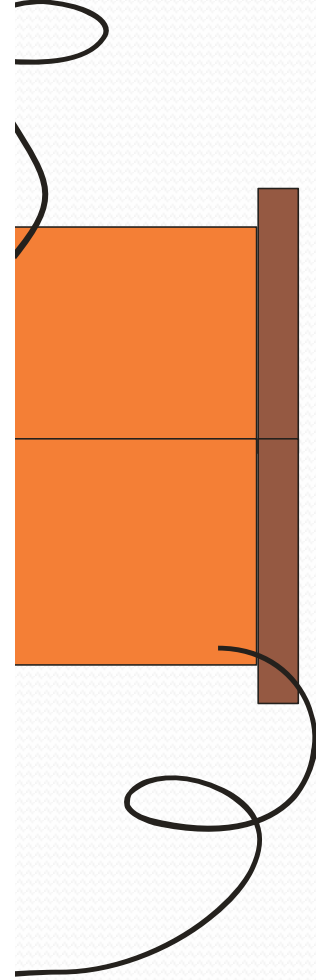
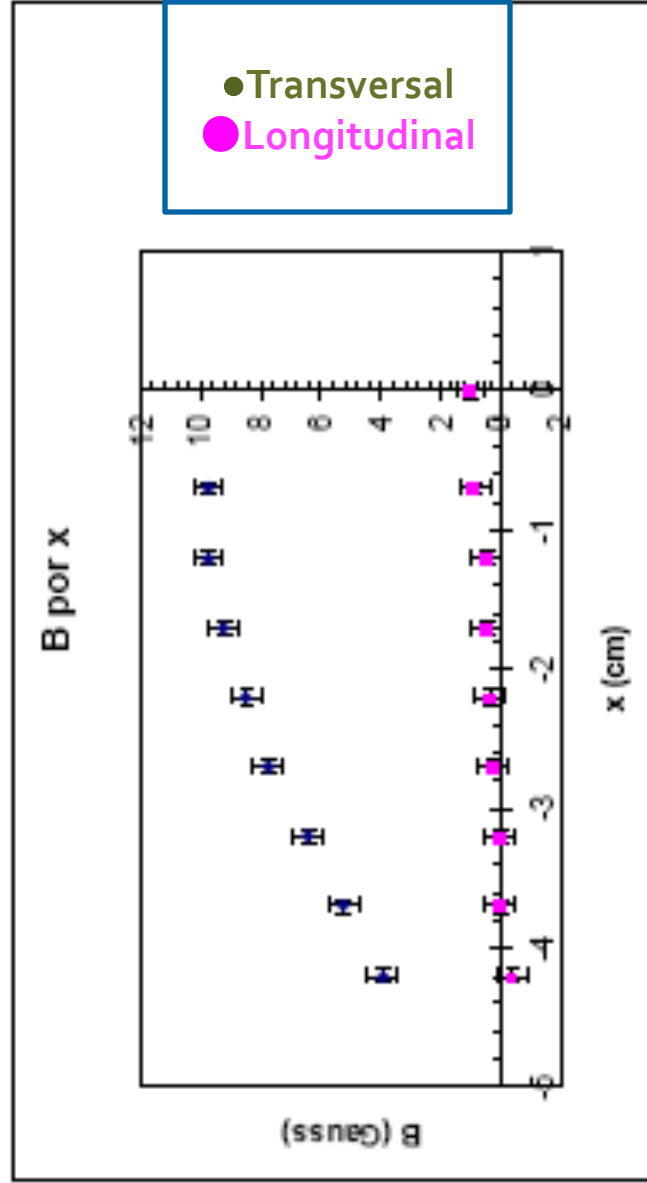
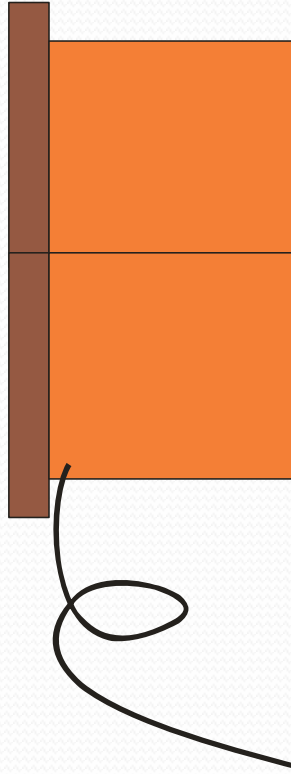
Para entregar – Parte 1

- Fazer **1** gráfico de \mathbf{B}_{lon} ao longo do eixo \mathbf{x} para **3** valores de corrente nas bobinas.
- Para **1** das correntes fazer **1** gráfico de $\mathbf{B}_{\text{trans}}$ e \mathbf{B}_{lon} ao longo do eixo \mathbf{x} .
 - Argumente fisicamente porque não é preciso medir o campo transversal e nem o campo nos outros eixos
- Fazer **1** gráfico de $\mathbf{B}_{\text{lon}}/i$ ao longo do eixo \mathbf{x} para as **3** correntes medidas
 - O resultado obtido é razoável? O que você esperaria? Discuta a linearidade entre campo e corrente.

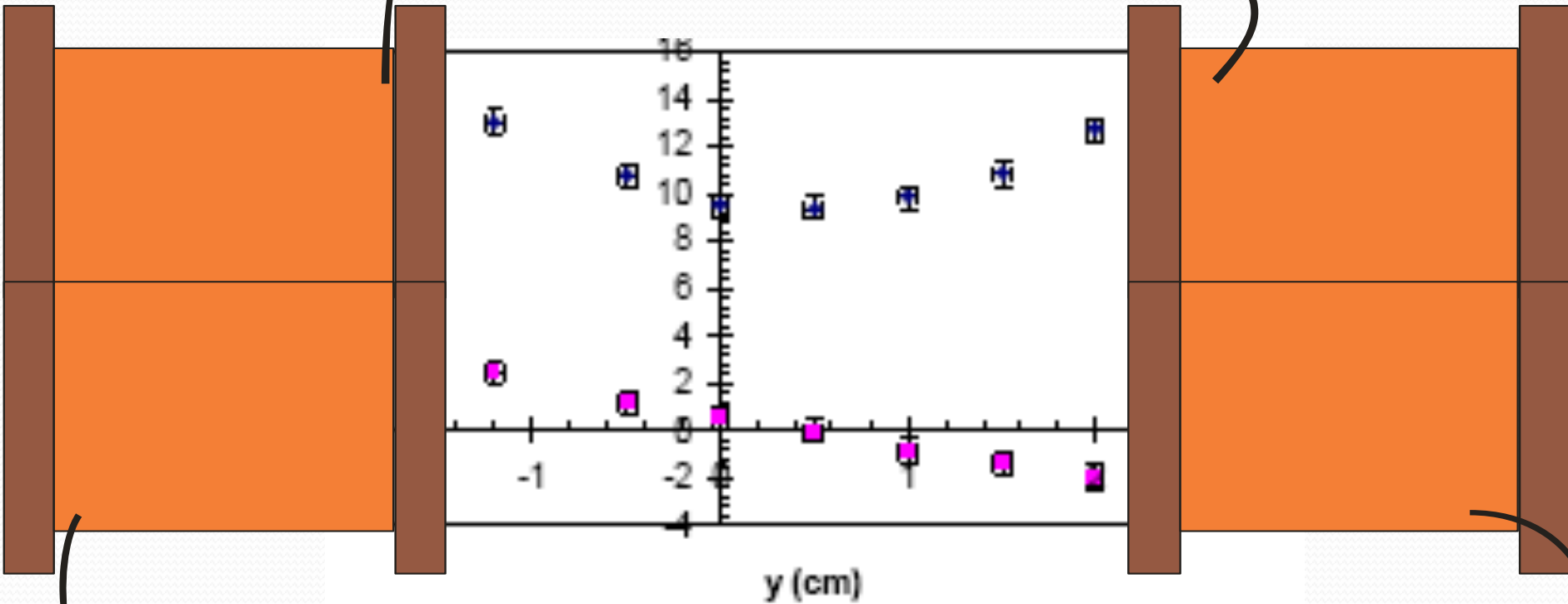


O campo magnético real:

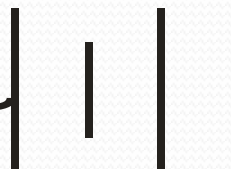
- Resultados:
ao longo de x



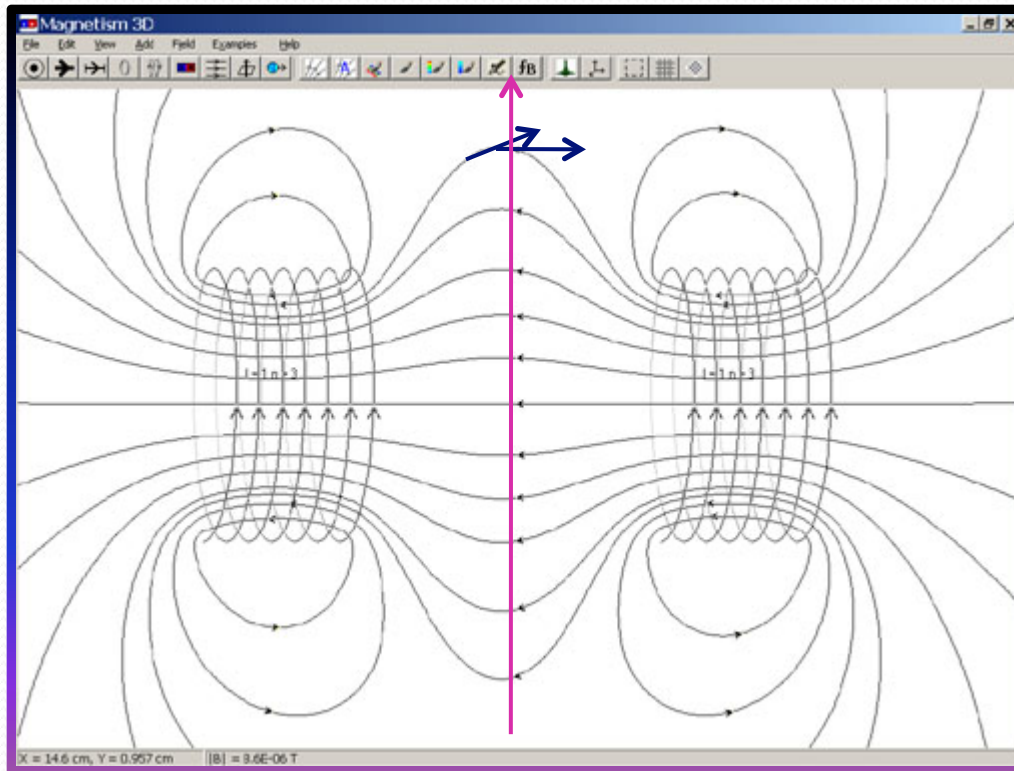
Resultados: ao longo de y



● Transversal
● Longitudinal



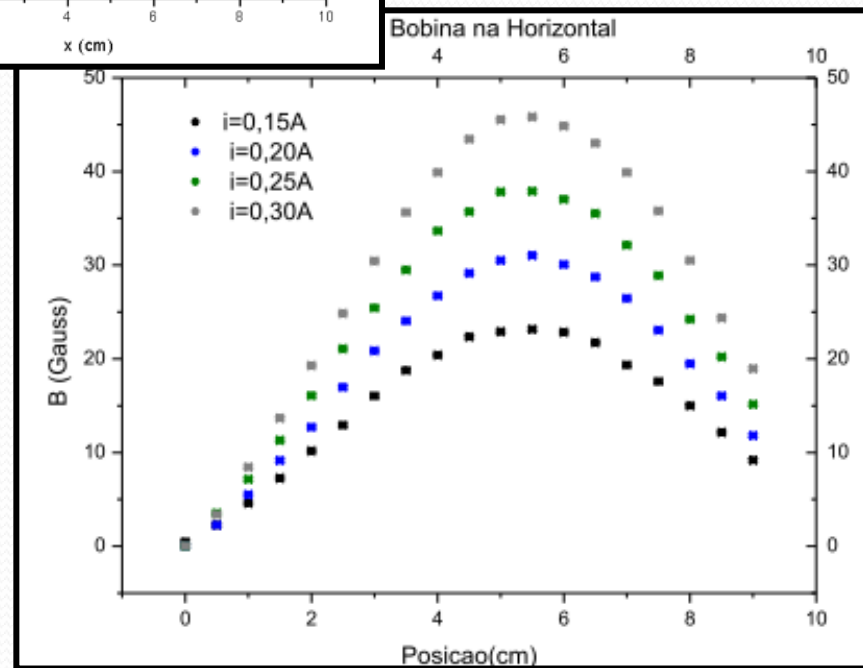
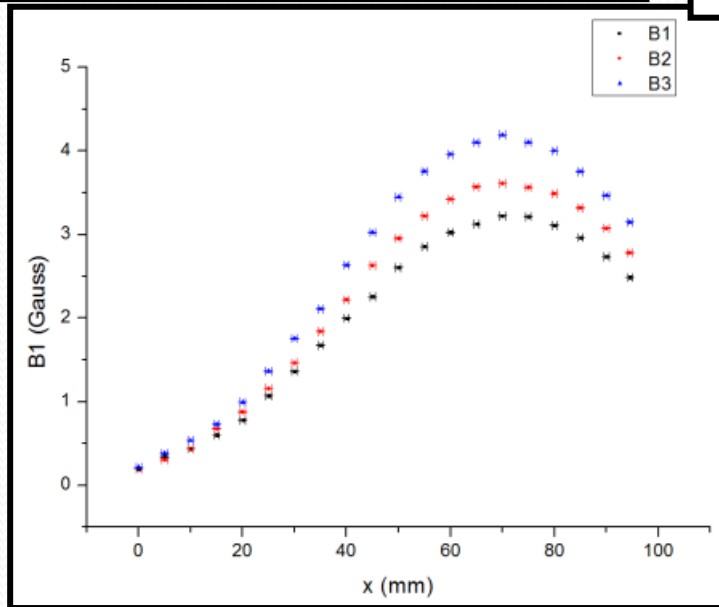
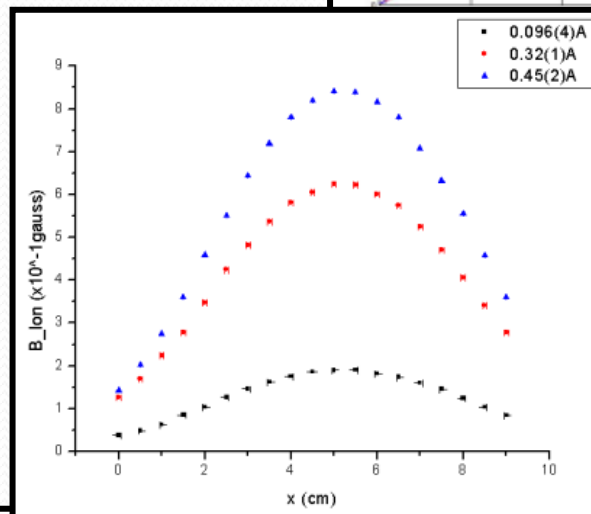
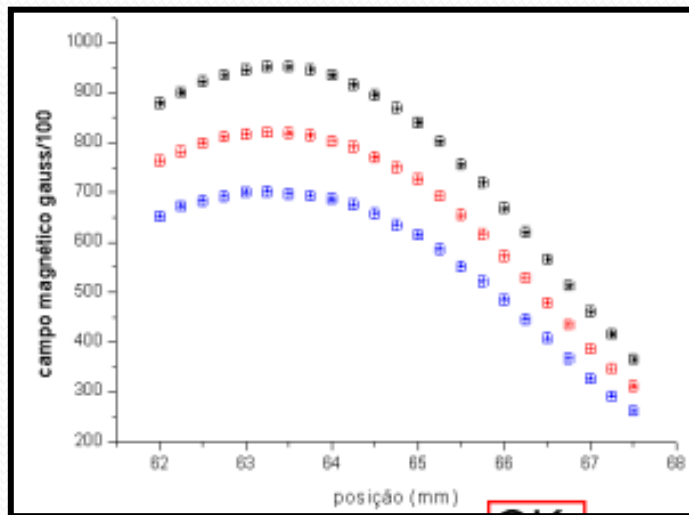
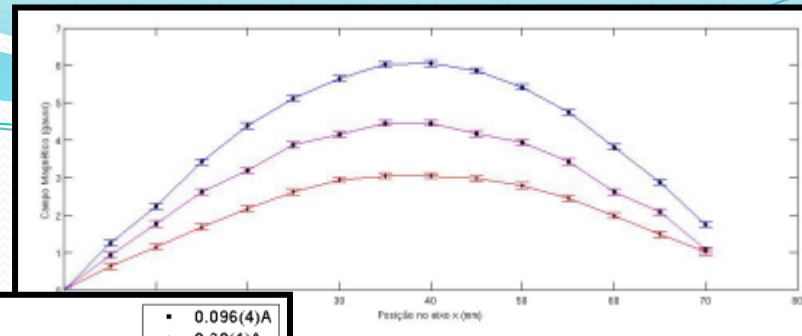
O campo magnético real:



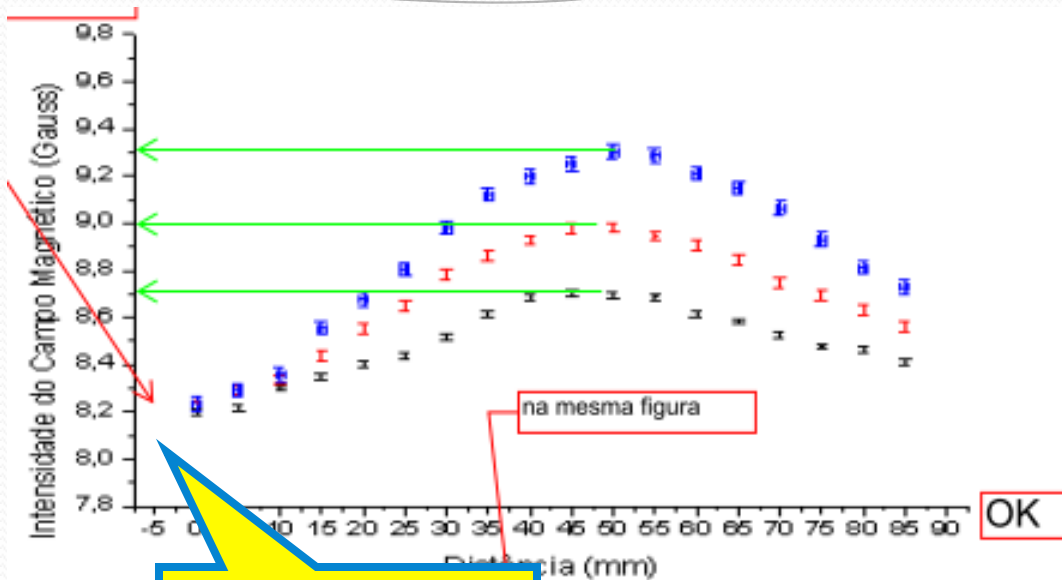
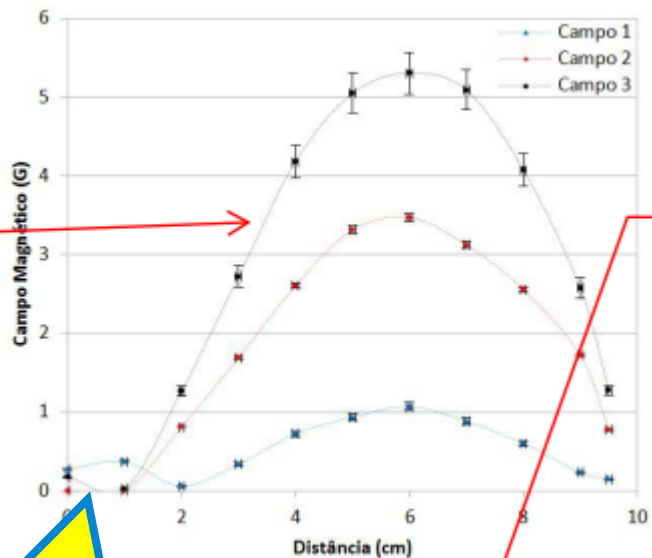
longitudinal $\sim \mathbf{o}$

transversal

B longitudinal



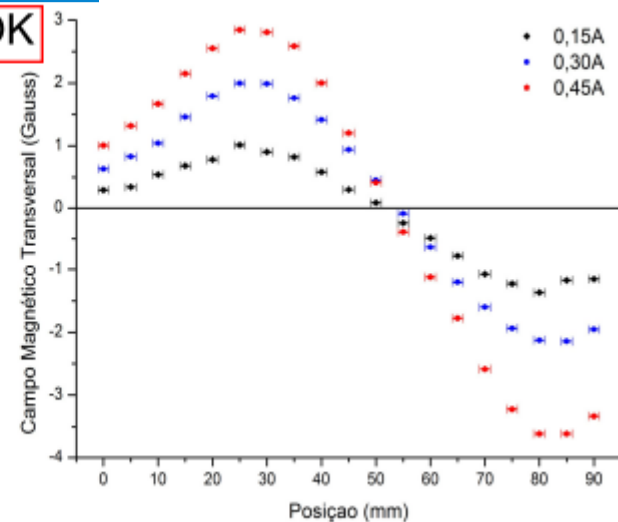
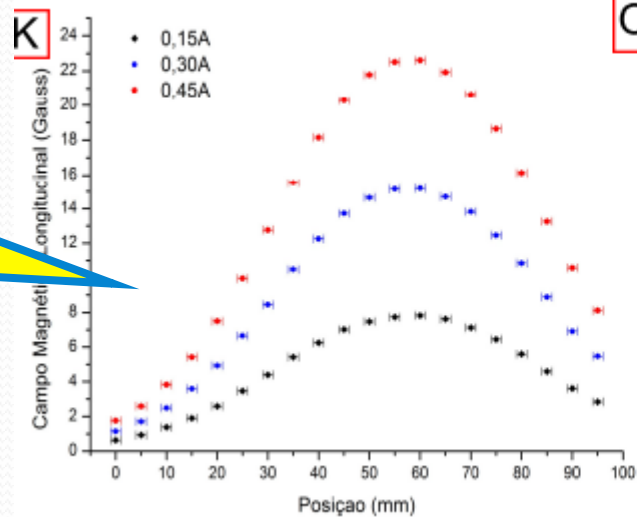
Problemas...



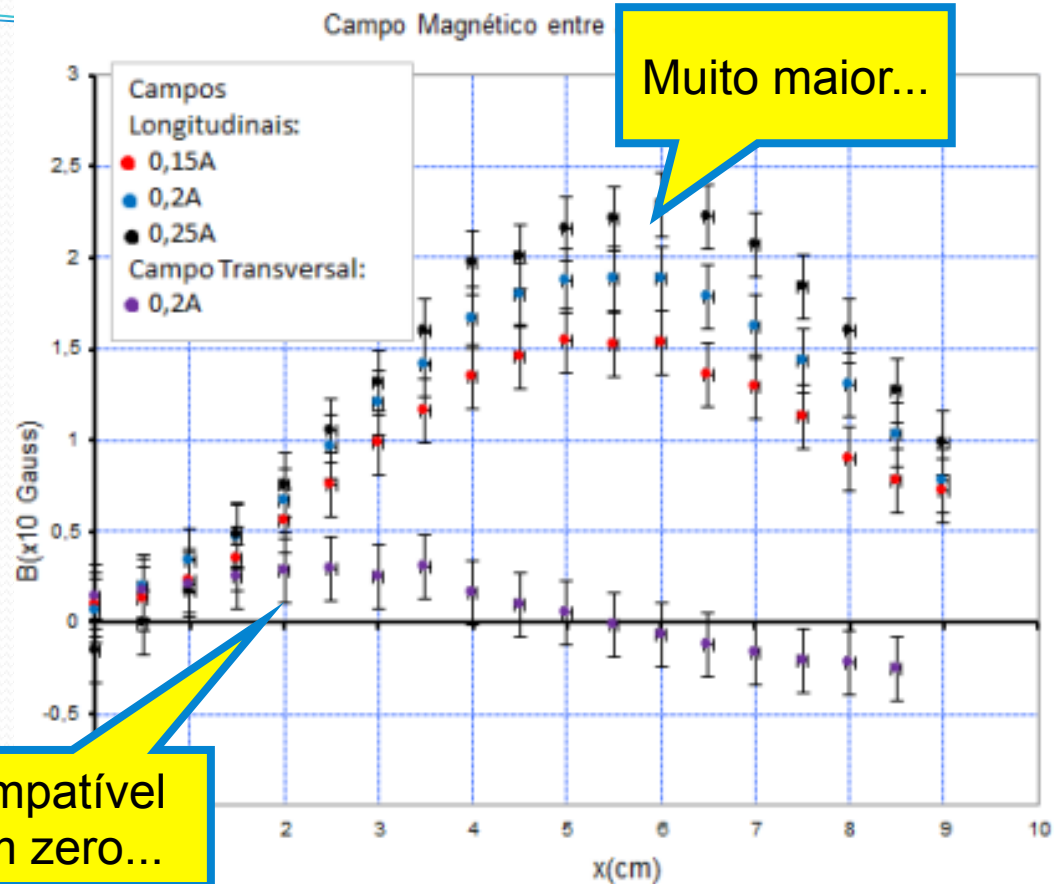
Algo errado...

Devia ir para zero...

Difícil comparar sem estar na mesma escala

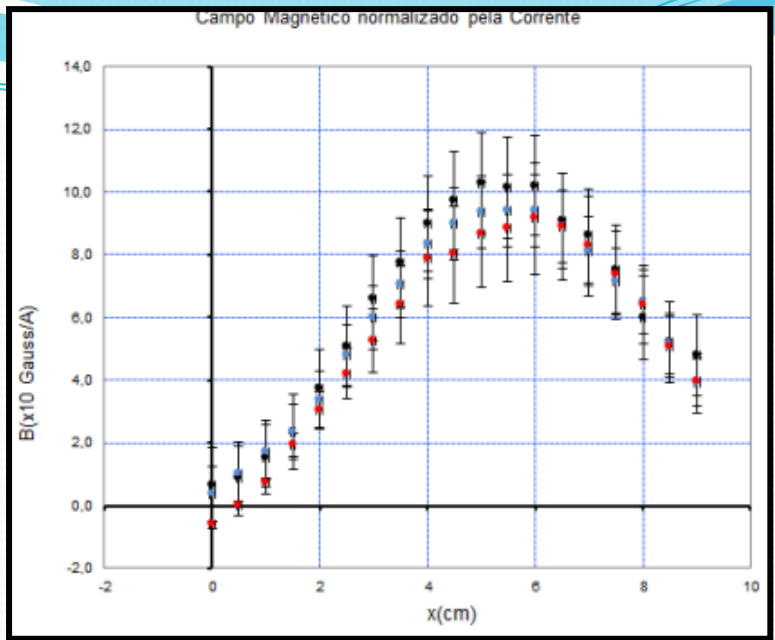
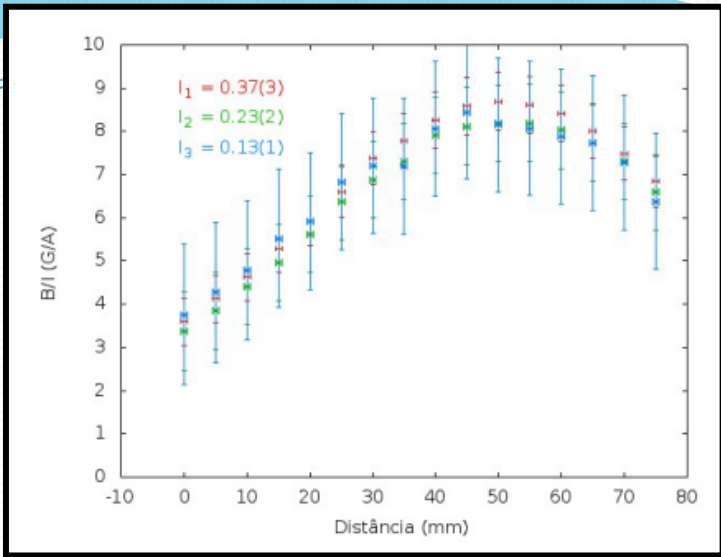


B transversal

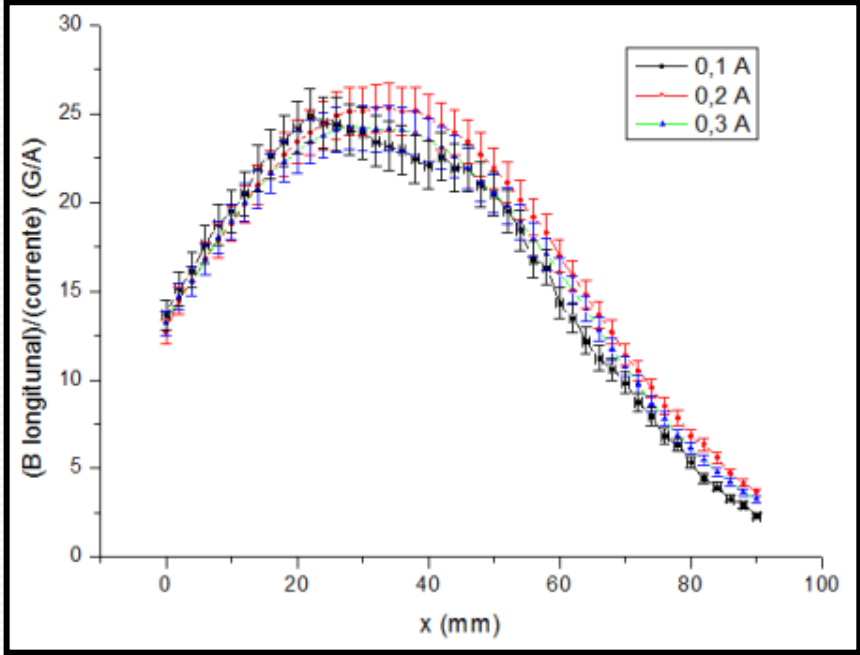
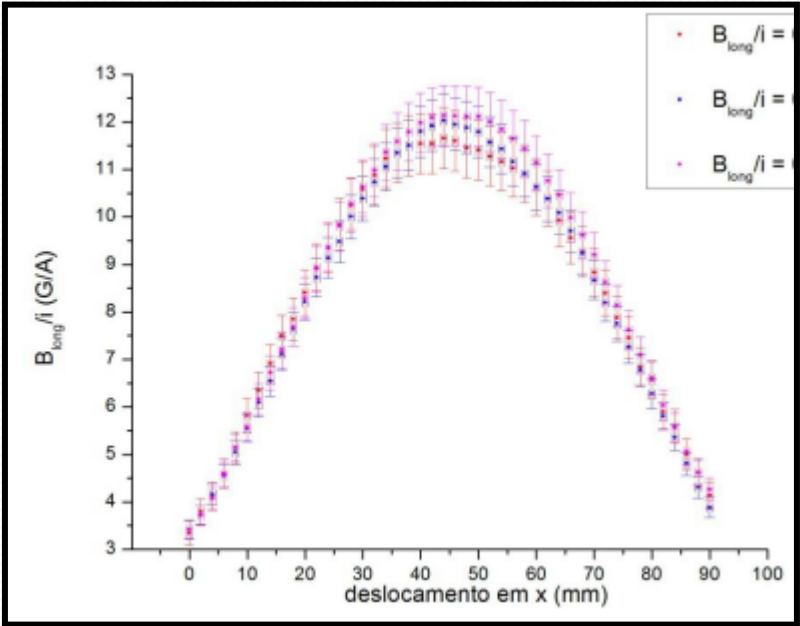


Na figura 3 estão representados os dados que obtivemos na medida do campo magnético. Para uma das correntes, medimos o campo magnético transversal. Esta componente se desloca em no máximo 2 Gauss do eixo $y=0$, grandeza da ordem da incerteza associada. É compatível com 0 em um bom trecho do gráfico, na parte central, cujos dados nos são mais relevantes. Os dados se também se distribuem igualmente abaixo e acima do eixo, evidenciando uma distribuição relativamente aleatória. A parte mais significativa desta série é, provavelmente, o campo magnético local. Não seria interessante para nós, dado nossos

B/i



$$\mathbf{B} = \int \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\pi r^2}$$



Erros do Sensor Hall, H02

Para o cálculo das incertezas, medidas do campo em função do tempo foram realizadas (durante 30 segundos). Primeiramente, o sensor Hall foi tarado com as bobinas desligadas, em seguida, posicionamos o sensor na posição (5.5, 0) cm com $i = 0,3(2)$ A e fizemos medidas durante 30 segundos a fim de verificar a distribuição dos dados. O objetivo era extrair o desvio padrão das oscilações e usa-la como incerteza instrumental. O gráfico pode ser visto a seguir.

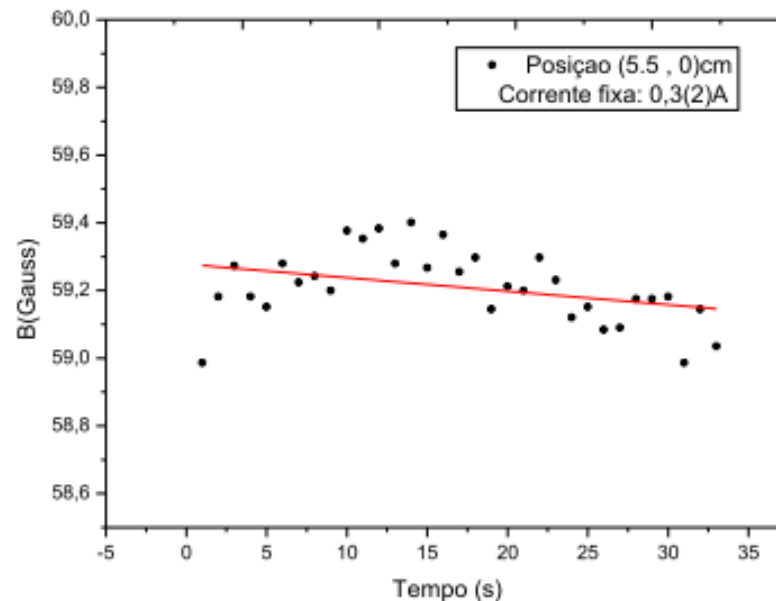
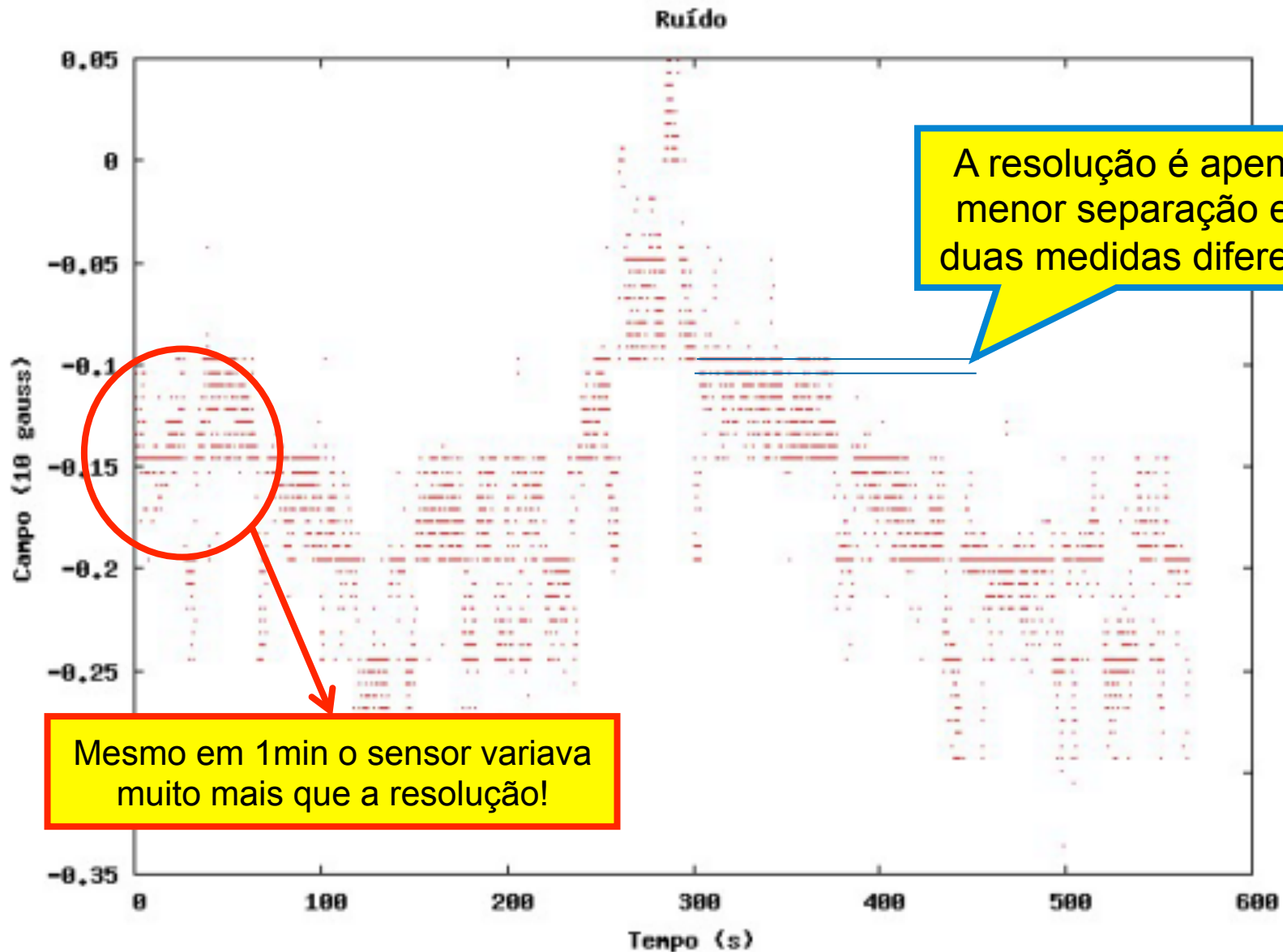


Figura 7: Gráfico de B_{long} ao longo do tempo para $i_{\text{FIXA}} = 0,3(2)$ A.

Erros Sensor Hall – H09 (2011)



Exp. 2 – Seletor de Velocidades

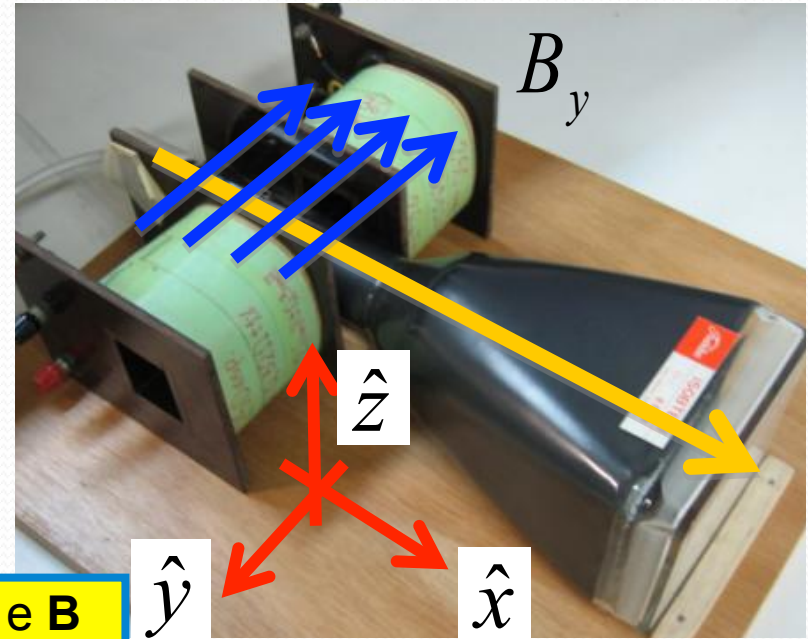
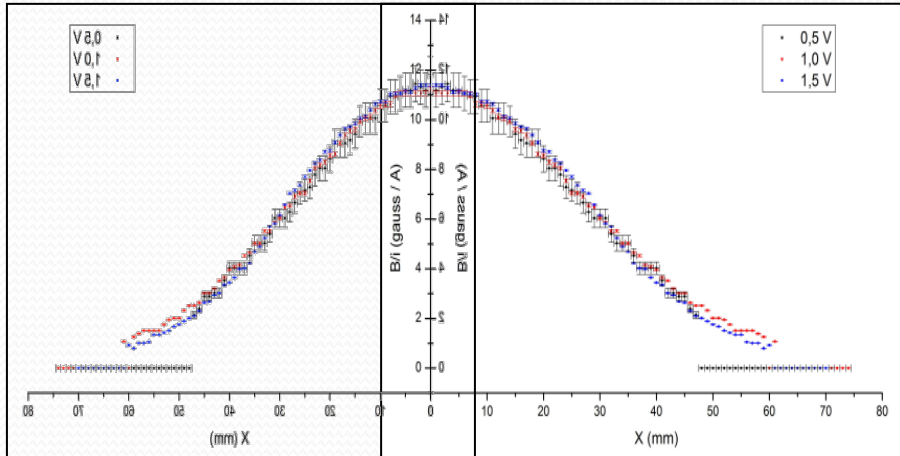
PROGRAMAÇÃO

- Semana 1
 - Movimento em campo elétrico
- Semana 2
 - Simular o campo elétrico
- Semana 3
 - Movimento em campo magnético
- Semana 4
 - Mapear campo magnético
- Semana 5
 - Espectrômetro de massa parte 1
- Semana 6
 - Espectrômetro de massa parte 2

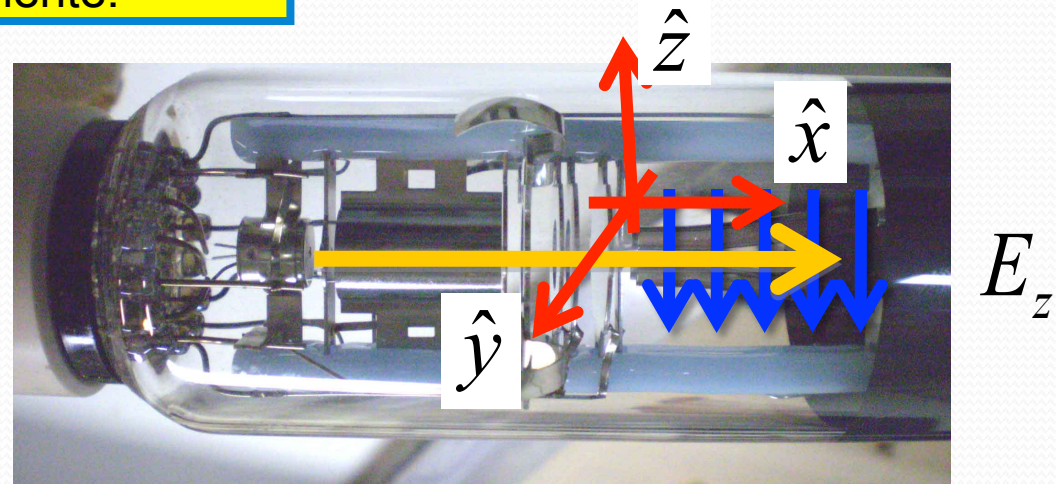
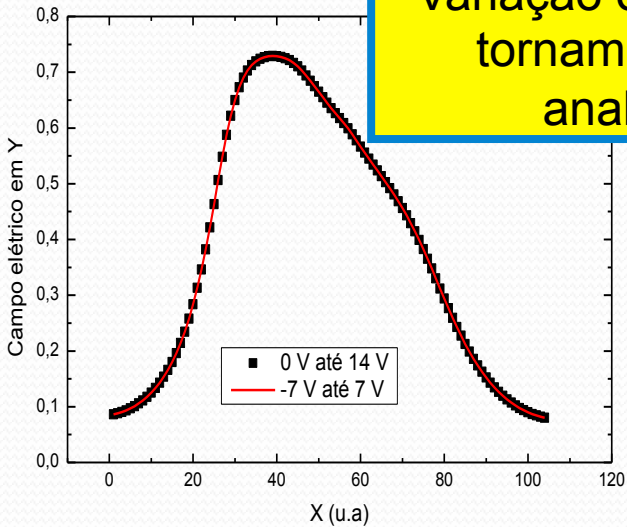


1. Modelo Teórico para o campo magnético no Seletor

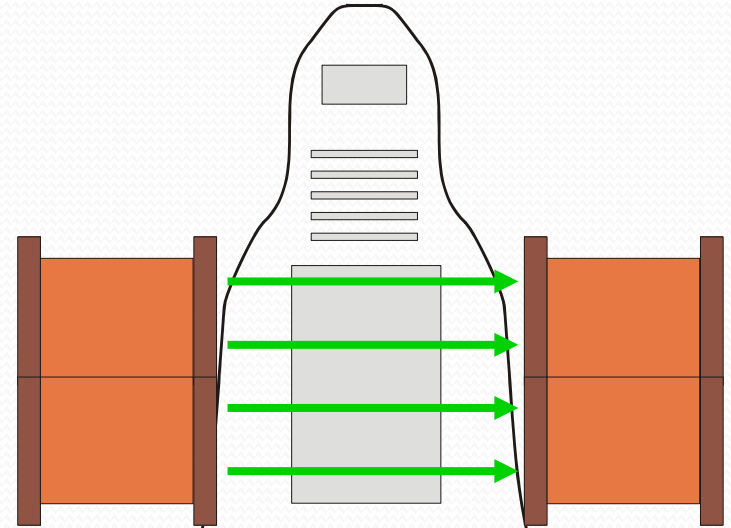
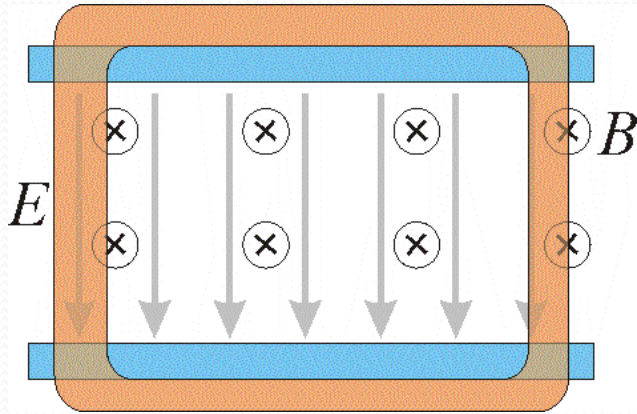
Seletor de velocidades - REAL



Variação espacial de \mathbf{E} e \mathbf{B} tornam difícil resolver analiticamente!

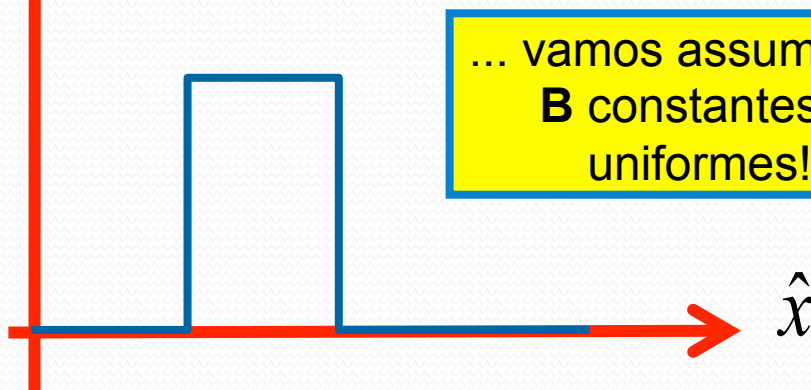


Seletor de velocidades - IDEAL

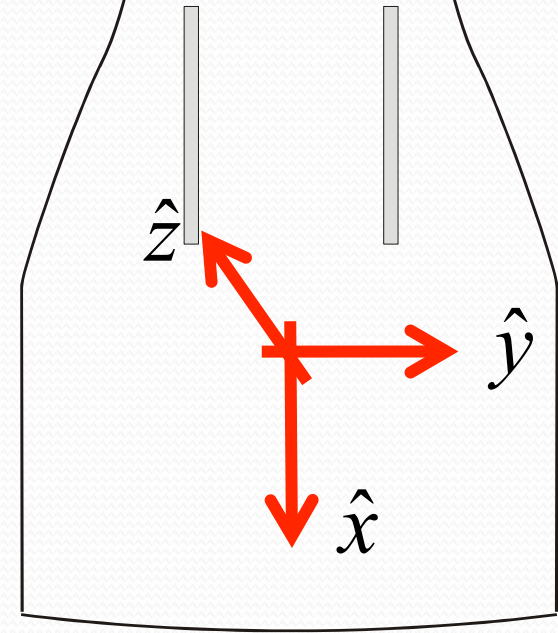


$$|\vec{E}| = E_z, |\vec{B}| = B_y$$

E_z, B_y

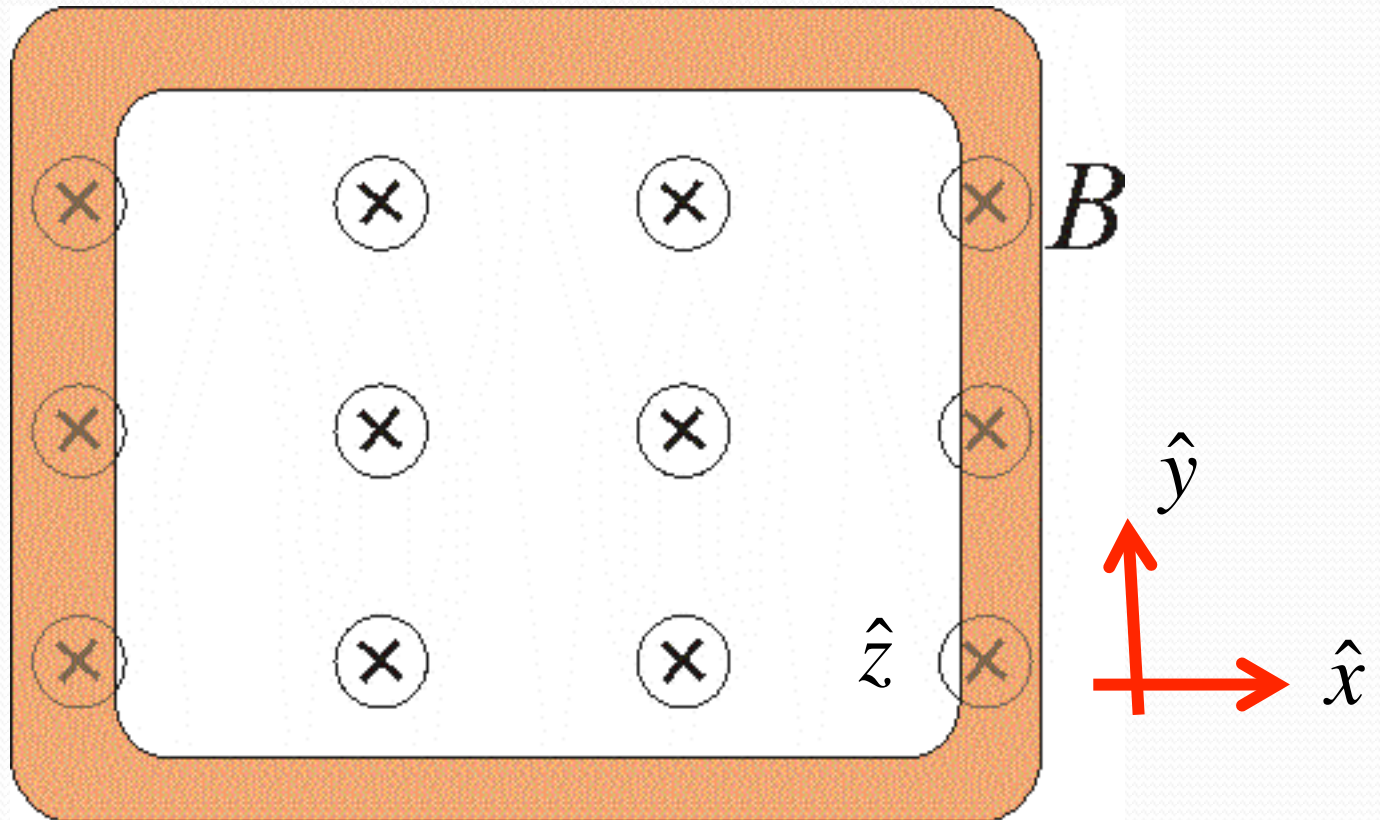


... vamos assumir \mathbf{E} e \mathbf{B} constantes e uniformes!



Campo magnético IDEAL

- Campo uniforme e constante entre as bobinas e nulo fora das bobinas.

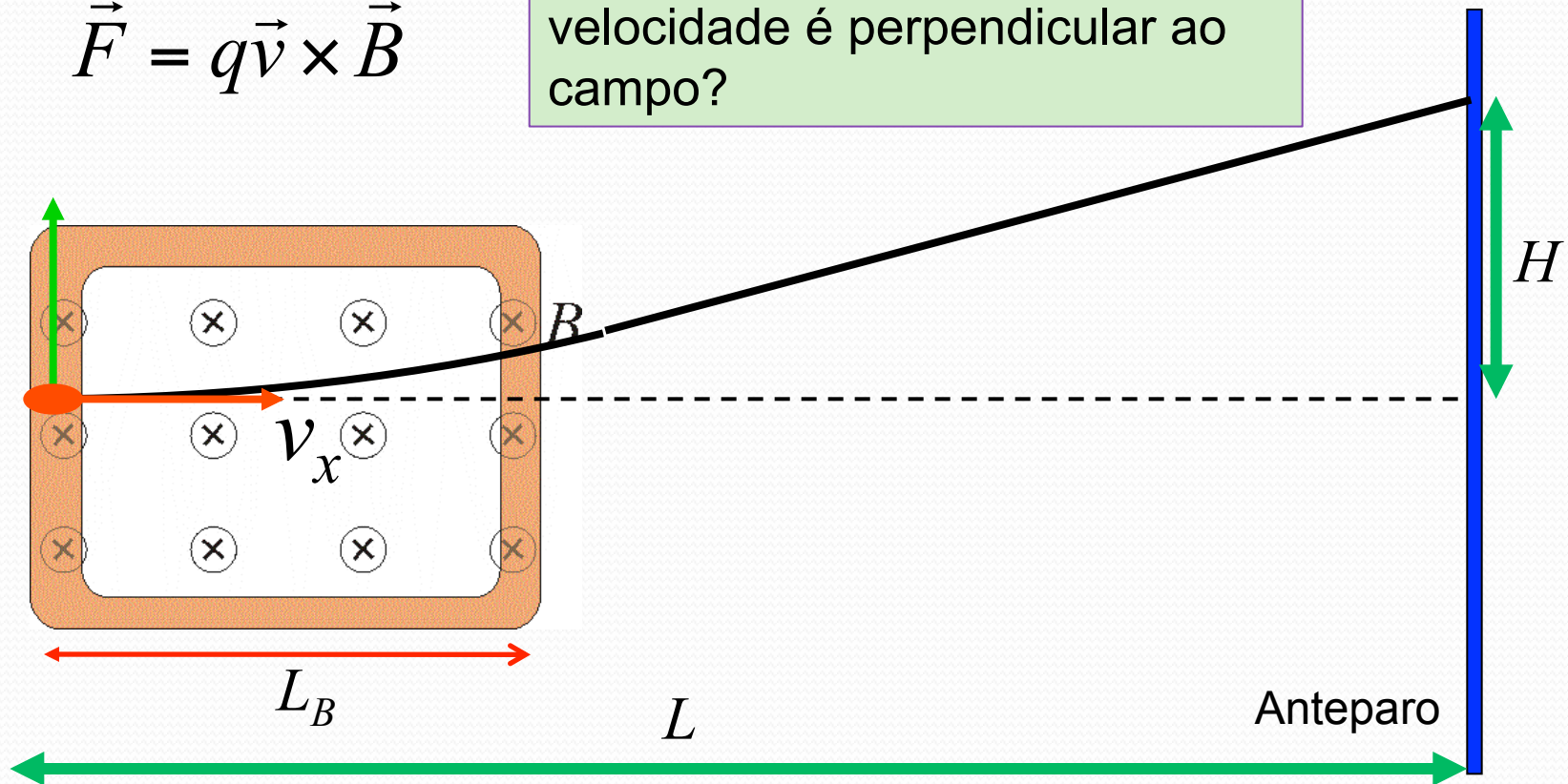


Movimento em campo idealizado

- Campo uniforme e constante entre as bobinas e nulo fora das bobinas

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

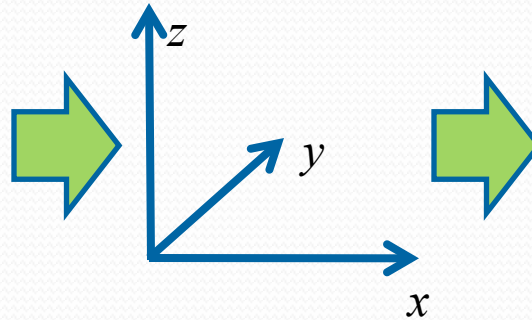
Qual a trajetória partícula se a velocidade é perpendicular ao campo?



Movimento em campo idealizado

- Fazendo o produto vetorial para calcular a força:

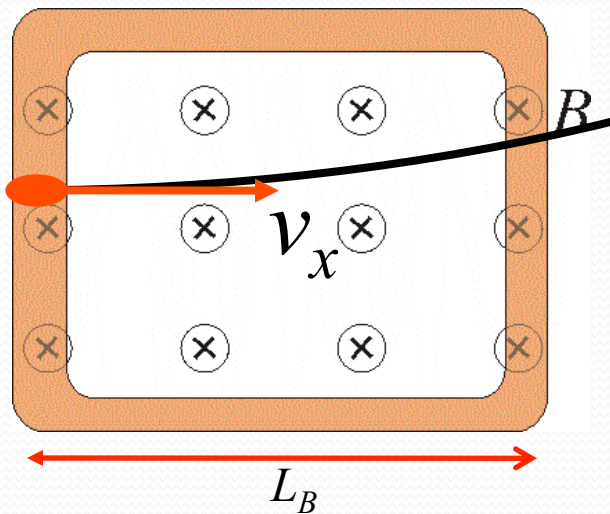
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B\hat{k}$$

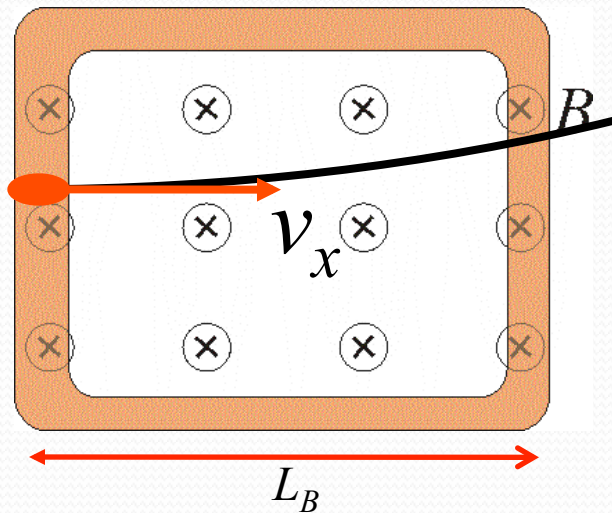


$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

Movimento em campo idealizado

- Chegamos a duas equações acopladas para as velocidades:

$$\vec{F} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qB(v_y \hat{i} - v_x \hat{j}) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} F_x &= -qBv_y \\ F_y &= qBv_x \end{aligned}$$



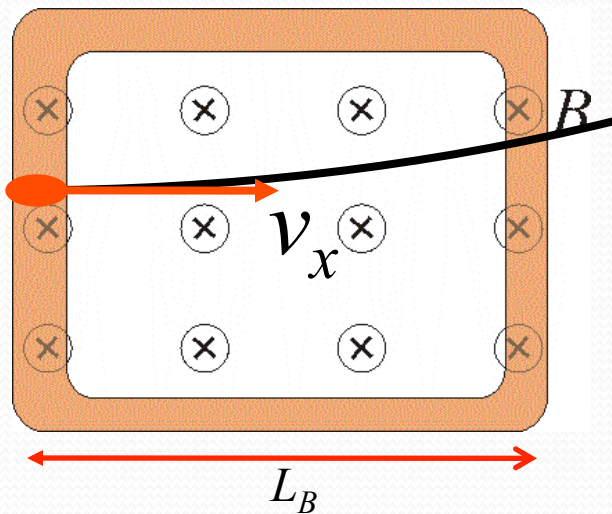
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_x &= -\overbrace{\frac{qB}{m}}^{\omega} v_y \\ \frac{d}{dt} v_y &= \frac{qB}{m} v_x \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} v_x = -\omega v_y \\ \frac{d}{dt} v_y = \omega v_x \end{cases}$$

Movimento em campo idealizado

- Que podem ser resolvidas derivando uma delas em t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_x &= -\omega v_y & \rightarrow & \frac{d^2}{dt^2} v_x = -\omega \frac{d}{dt} v_y & \rightarrow & \frac{d^2}{dt^2} v_x = -\omega^2 v_x \\ \frac{d}{dt} v_y &= \omega v_x & \rightarrow & & & \end{aligned}$$



$$v_x = v_{0x} \cos(\omega t)$$

$$v_z = v_{0x} \sin(\omega t)$$

Movimento em campo idealizado

- E podemos encontrar a equação da órbita

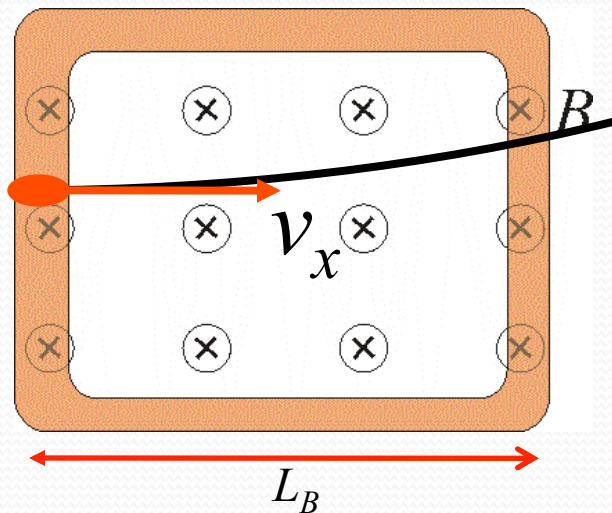
$$\frac{dx}{dt} = v_{0x} \cos(\omega t)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{0x} \sin(\omega t)$$



$$x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$z = -\frac{v_{0x}}{\omega} \cos(\omega t)$$



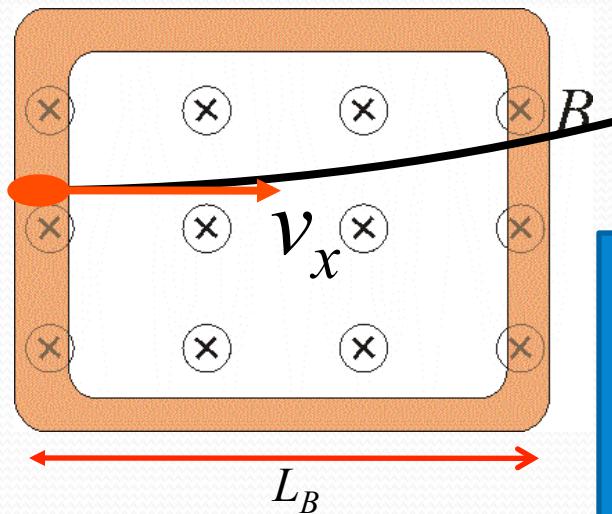
Qual é a trajetória descrita por estas equações?

Movimento em campo idealizado

- É uma órbita circular!

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{v_{0x}}{\omega} \right)^2$$

Equação de uma circunferência de raio v_{0x}/ω



$$R = \frac{v_{0x}}{\omega} = \frac{mv_{0x}}{qB}$$

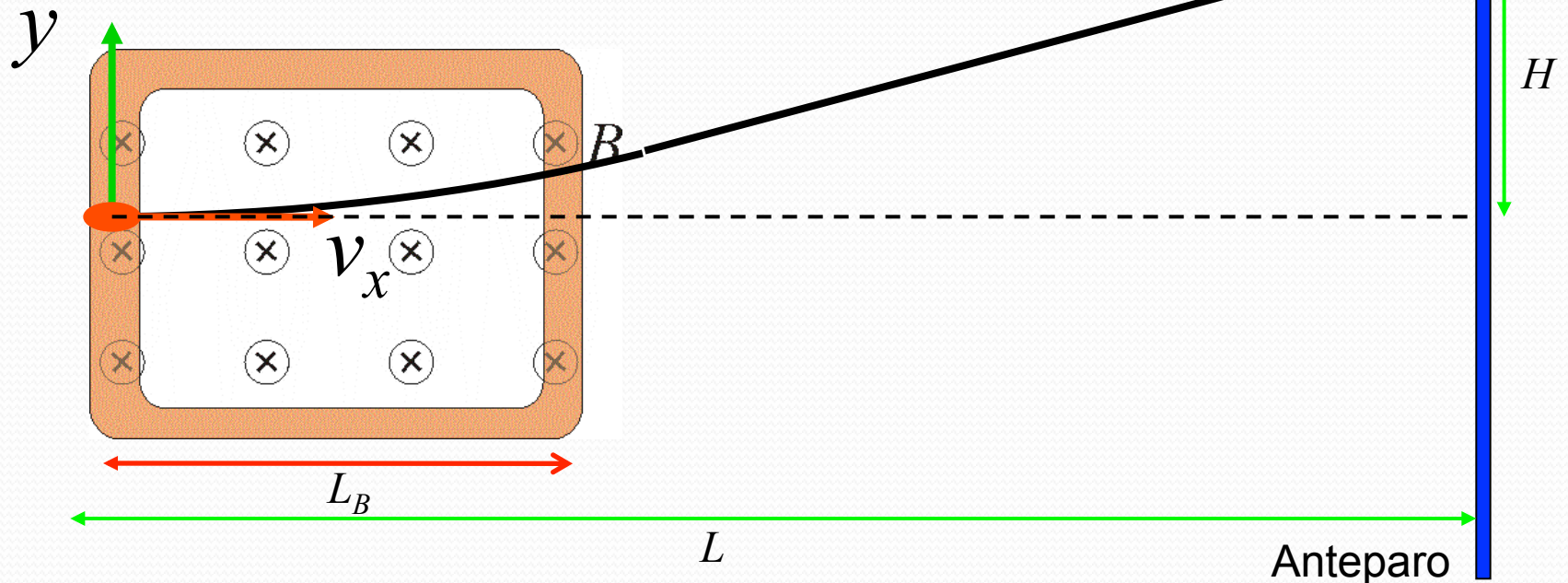
O resultado é bastante intuitivo! Sendo a força magnética perpendicular à velocidade ela é centrípeta e a trajetória é “circular”

Movimento em campo idealizado

- Trajetória circular na região do campo magnético

$$R = \frac{mv_{0x}}{qB}$$

- Qual é o deslocamento H na tela do TRC?
- Temos que usar geometria...





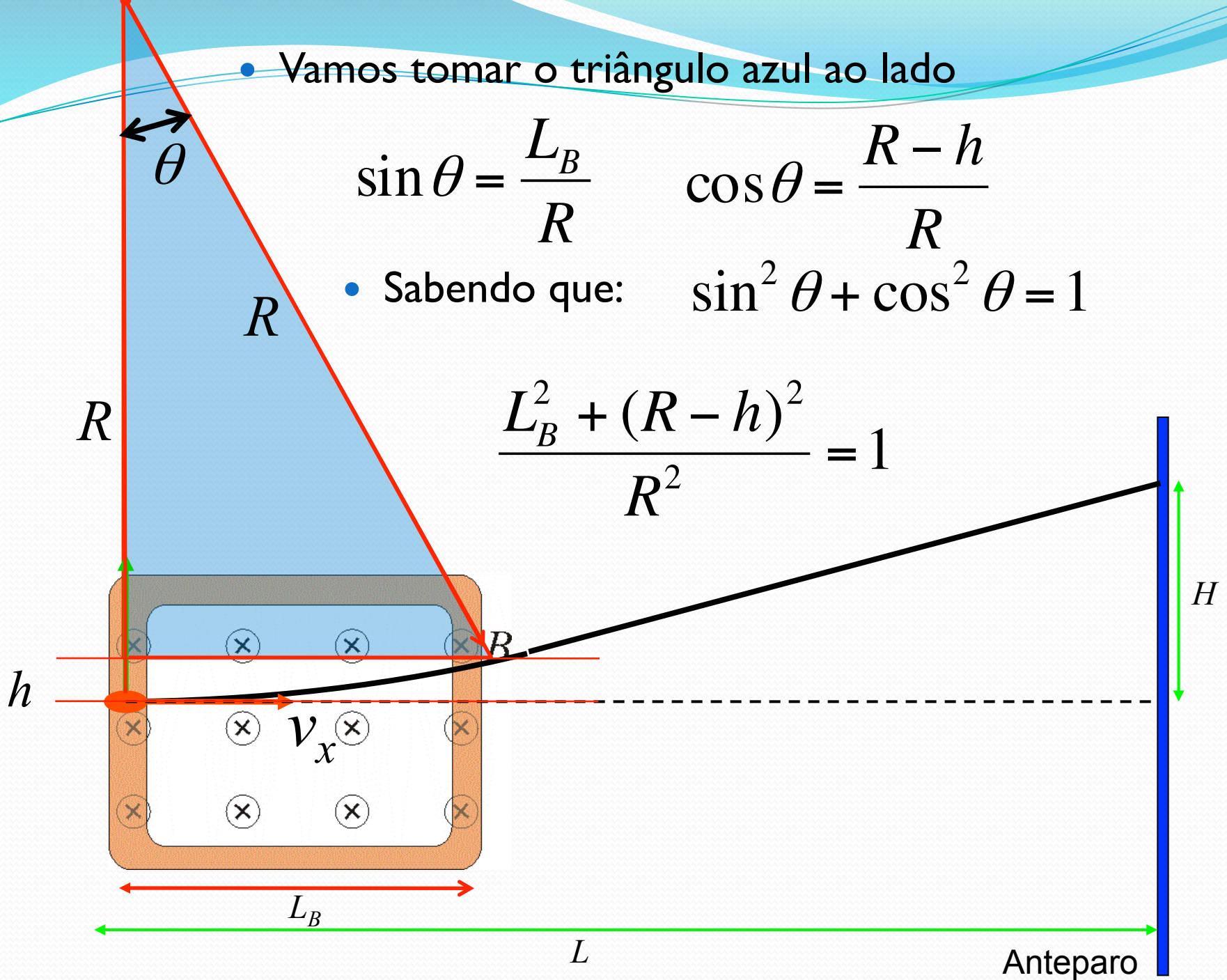
2. Deslocamento x Campo **B**

- Vamos tomar o triângulo azul ao lado

$$\sin \theta = \frac{L_B}{R} \quad \cos \theta = \frac{R - h}{R}$$

- Sabendo que: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\frac{L_B^2 + (R - h)^2}{R^2} = 1$$



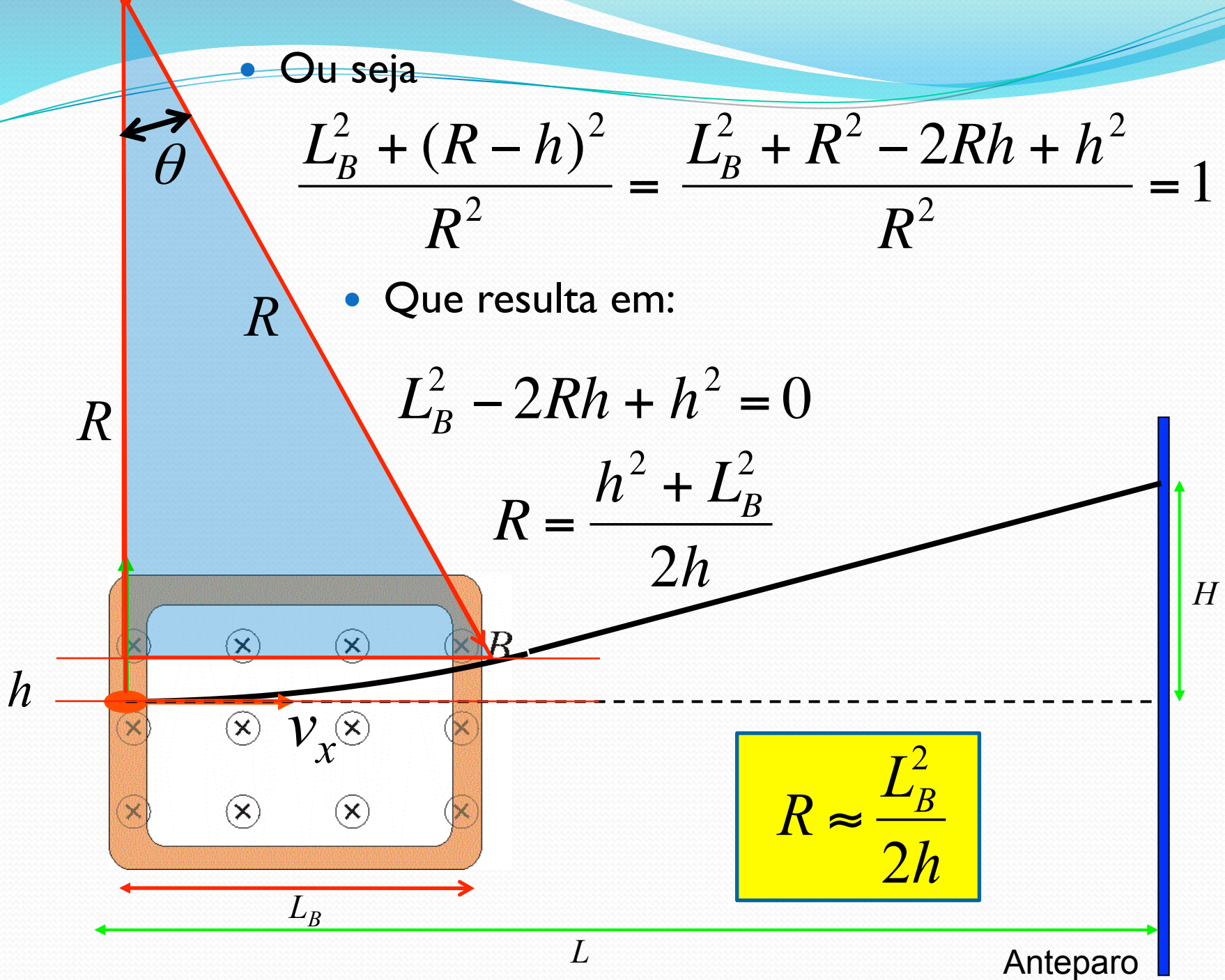
- Ou seja

$$\frac{L_B^2 + (R - h)^2}{R^2} = \frac{L_B^2 + R^2 - 2Rh + h^2}{R^2} = 1$$

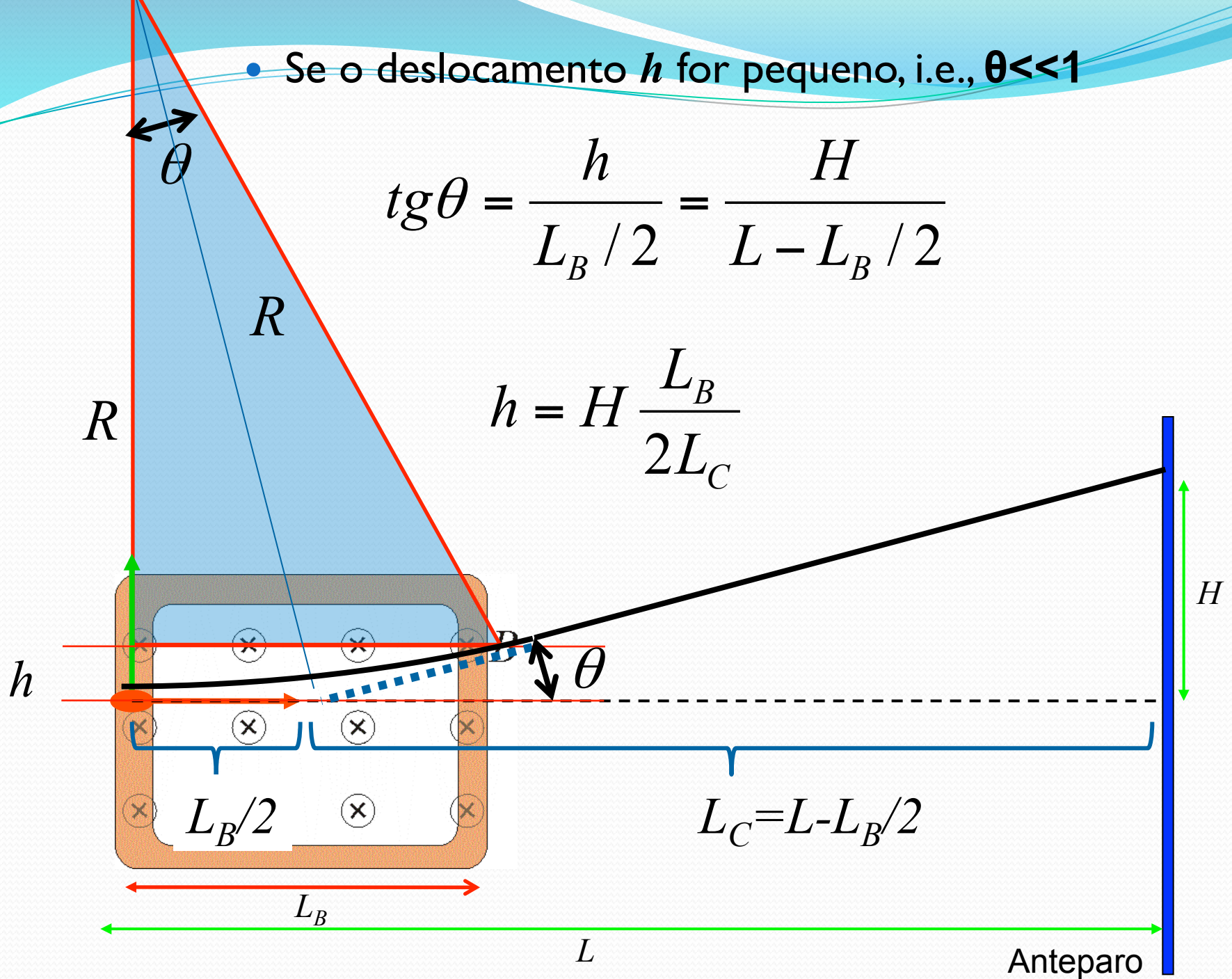
- Que resulta em:

$$L_B^2 - 2Rh + h^2 = 0$$

$$R = \frac{h^2 + L_B^2}{2h}$$



- Se o deslocamento h for pequeno, i.e., $\theta \ll 1$



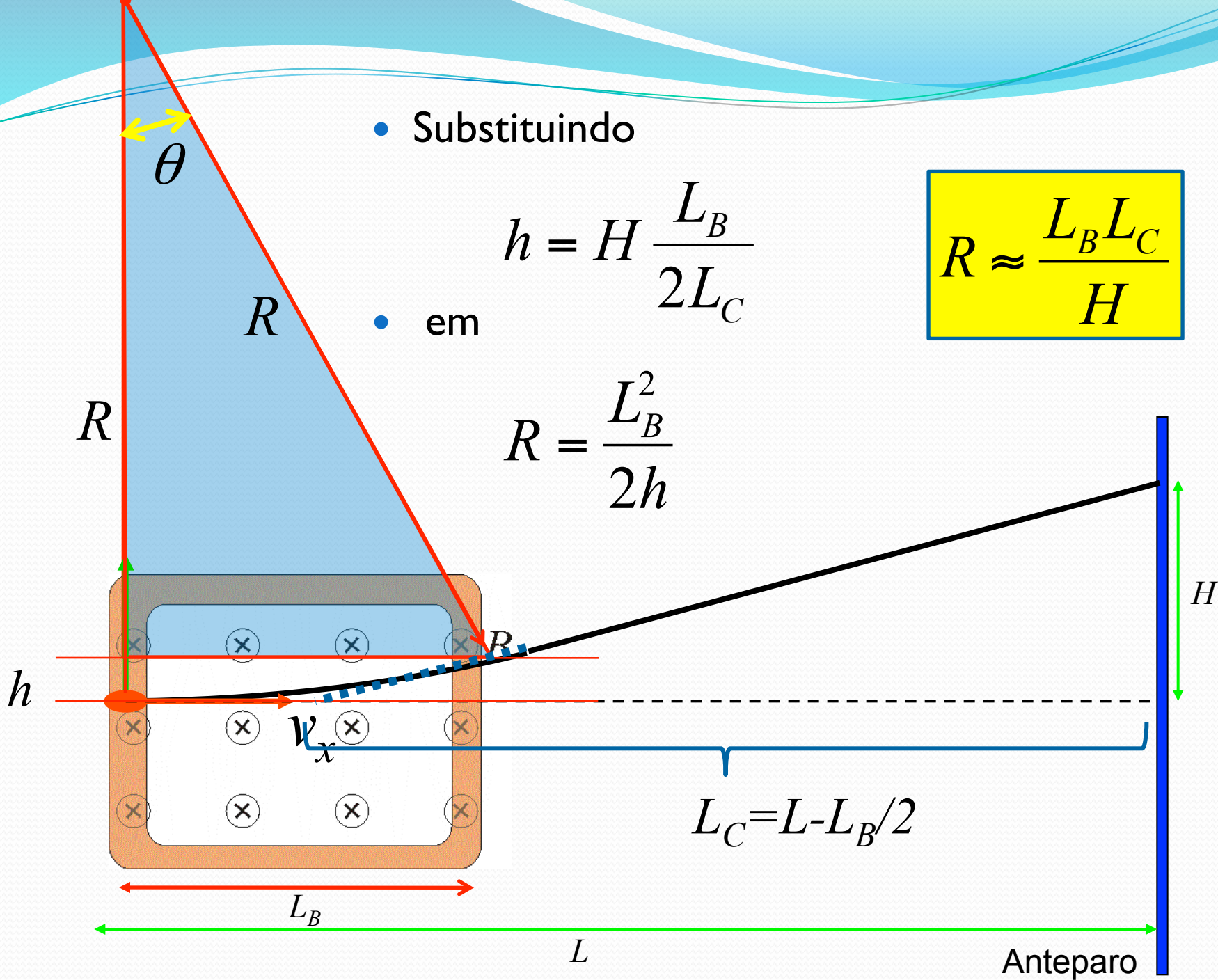
- Substituindo

$$h = H \frac{L_B}{2L_C}$$

- em

$$R = \frac{L_B^2}{2h}$$

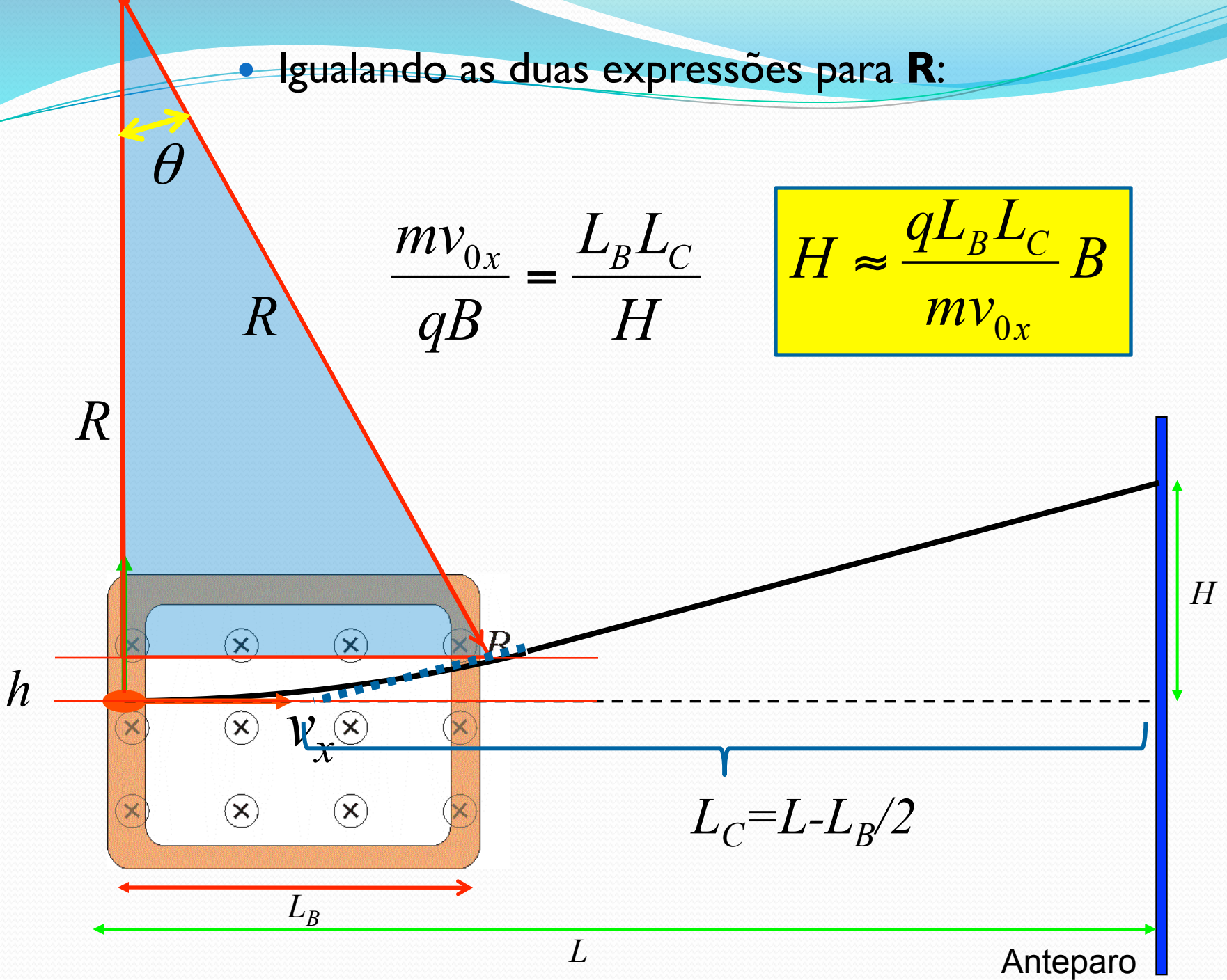
$$R \approx \frac{L_B L_C}{H}$$



- Igualando as duas expressões para **R**:

$$\frac{mv_{0x}}{qB} = \frac{L_B L_C}{H}$$

$$H \approx \frac{qL_B L_C}{mv_{0x}} B$$

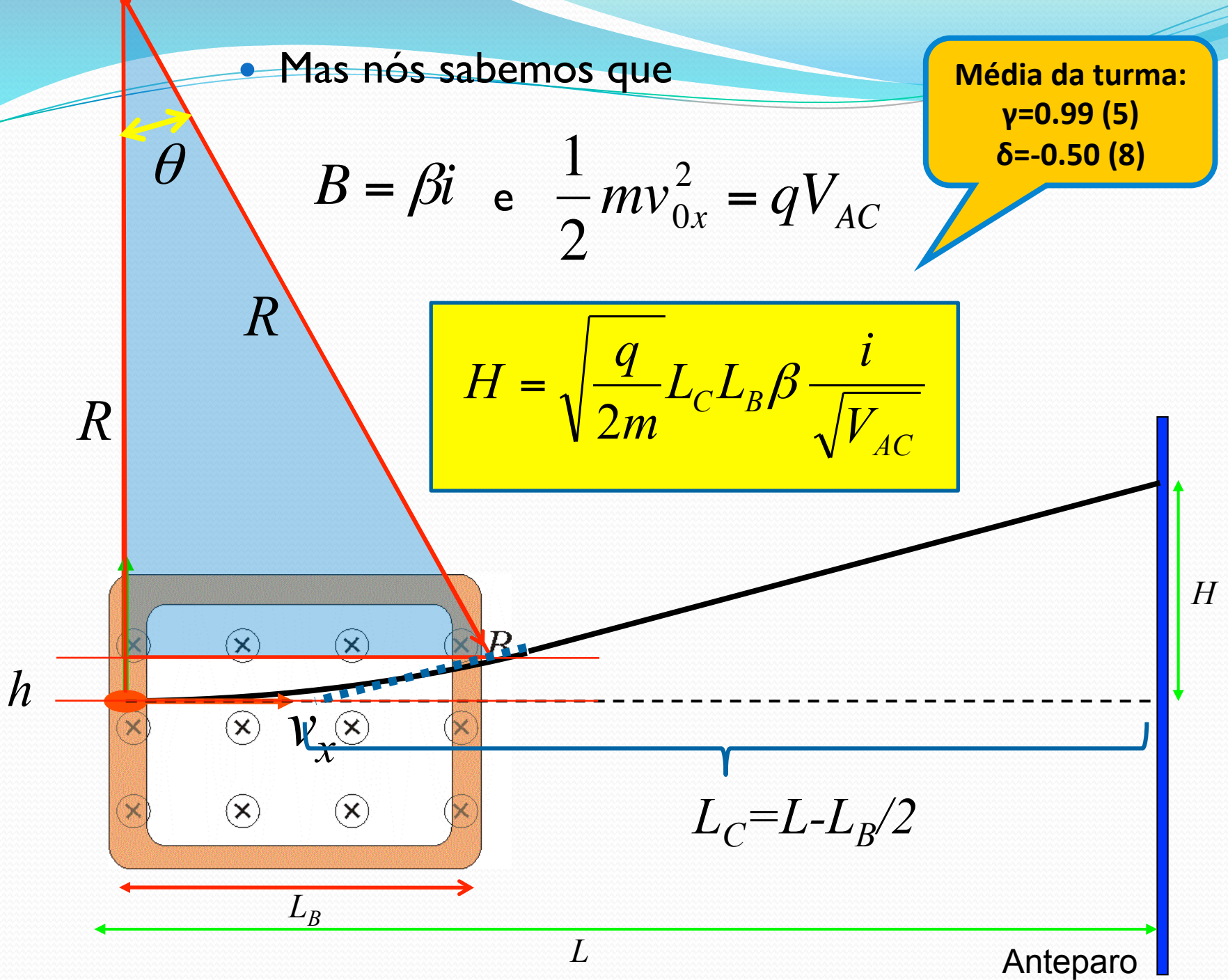


- Mas nós sabemos que

$$B = \beta i \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = q V_{AC}$$

Média da turma:
 $\gamma = 0.99$ (5)
 $\delta = -0.50$ (8)

$$H = \sqrt{\frac{q}{2m}} L_C L_B \beta \frac{i}{\sqrt{V_{AC}}}$$



Para entregar – Parte 1

- Comparar o efeito do campo magnético, sobre os elétrons, com a previsão do seu modelo
 - A partir dos dados do deslocamento do elétron no campo magnético (semana 3), verifique se a fórmula teórica é válida
 - Compare o valor dos expoentes e da constante
- Como pode obter $(L_B \beta)_{eff}$?
 - Experimente a partir dos dados da semana 4
 - Qual seria o comprimento (L_{Beff}) das bobinas ideais?

veja possibilidades a seguir

Funcionamento dos modelos:

- Os modelos vão prever corretamente o comportamento dos elétrons se as dimensões efetivas dos campos forem escolhidas realisticamente:
 - L_{Peff} e d_{eff} no caso do campo elétrico
 - L_{Beff} e β_{eff} no caso do campo magnético
- Precisamos determinar esses parâmetros, mas as medidas realizadas só permitem determinar combinações:
 - $(L_p / d)_{eff}$ no caso do campo elétrico
 - $(L_B \times \beta)_{eff}$ no caso do campo magnético

O cálculo dos comprimentos efetivos

- É possível através do cálculo do campo médio: se obtém o comprimento, mas nesse caso a escolha da região onde o campo atua depende do experimentador:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} E(x) dx$$

- Esse Δx é a distância no eixo x onde existe campo elétrico: L_p . Mas como o campo se espalha e pode não ser simétrico, vamos ter que obter um L_{peff} para descrever com o nosso modelo (de campos ideais), o efeito dos campos reais.
- Feito da maneira acima, essa escolha é altamente pessoal:
 - Poderíamos escolher critérios como: a região onde o campo atua vai a 5% do valor máximo...ou 10% do valor máximo, ou 1%....de cada lado
 - É um bom critério?

Não é! Veja porque a seguir

Determinação dos comprimentos efetivos dos campos elétrico e magnético que atuam sobre o feixe de e-

- Para as partículas que passam sem desvio, o modelo prevê que as forças elétrica e magnética são iguais e de sentido contrário.
- Mas isso não é verdade para o nosso aparato porque:
 - Os campos atuam em regiões de comprimento diferente
 - Os campos não têm a mesma dependência em x.
- Então, não são as forças que são iguais e contrárias: mas o impulso que elas fornecem aos elétrons que passam sem desvio que são iguais e contrários:

$$\textit{condição para partícula não desviada} \Rightarrow \vec{I}_{Fmag} = \vec{I}_{Fe}$$

O que o cálculo do impulso fornece:

- Vamos ver como é o impulso da Fe na partícula:

$$\vec{I}_E = \int_0^t \vec{F}_E(t) dt \rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}} \quad \vec{I}_E = \int_x^{x'} q_e \frac{\vec{E}(x) dx}{v_{0x}}$$

t é o intervalo de tempo que ela passa dentro do campo E

- Para obter isso vamos ter que fazer essa integral, usando o campo simulado ou medido, ao longo de todo o comprimento em **x** onde ele atua:
 - Essa integral vai somando o impulso em cada intervalo dx que tenha campo: dá o impulso acumulado
 - Com o gráfico desse impulso, (I_p vs x), fica mais fácil colocamos um critério realista para encontrar L_{peff} .

Calculando o impulso

Usar o campo simulado

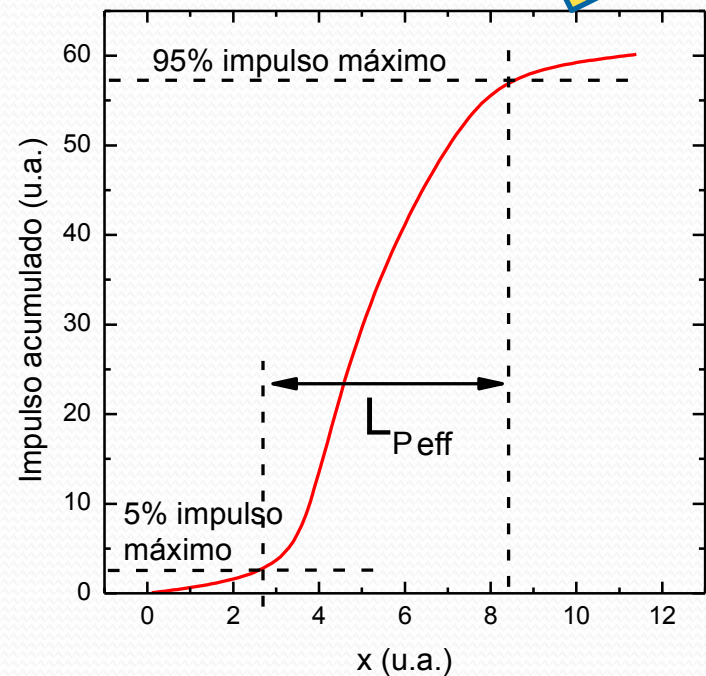
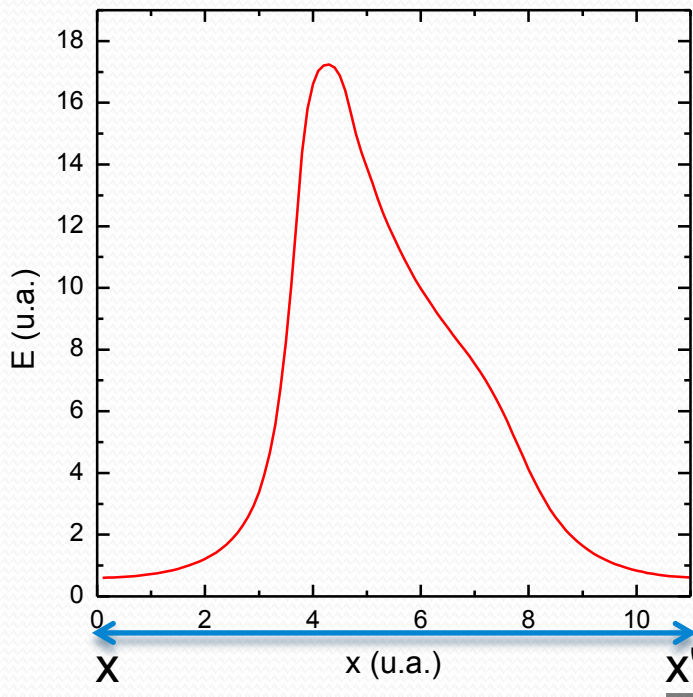
Impulso - unidades: NxS ou Kgxm/s

- Calculando o impulso acumulado

$$\vec{I}(x) = \int_0^t \vec{F}_E(t) dt = \int_x^{x'} q_e \frac{E(x)}{v_{0x}} dx \quad t = \frac{x}{v_{0x}} \rightarrow dt = \frac{dx}{v_{0x}}$$

Calculo L_{Peff} a partir deste gráfico: limites (escolha) entre 5 e 95% do máx

Simulação



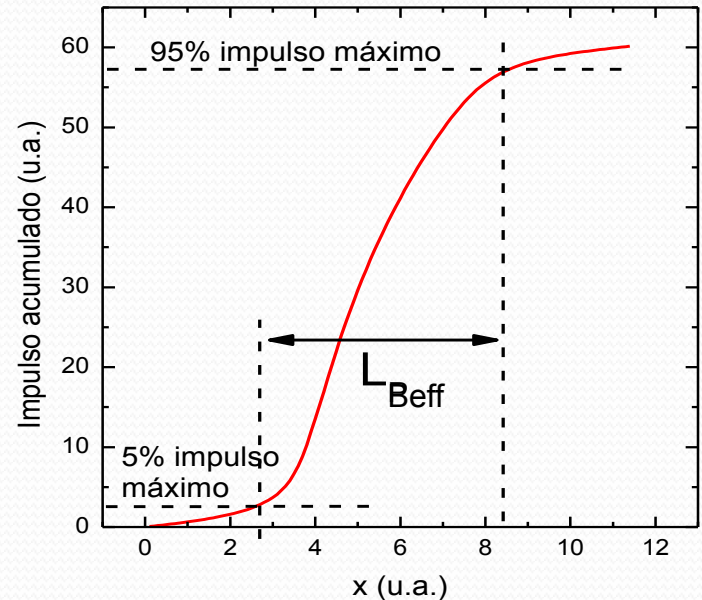
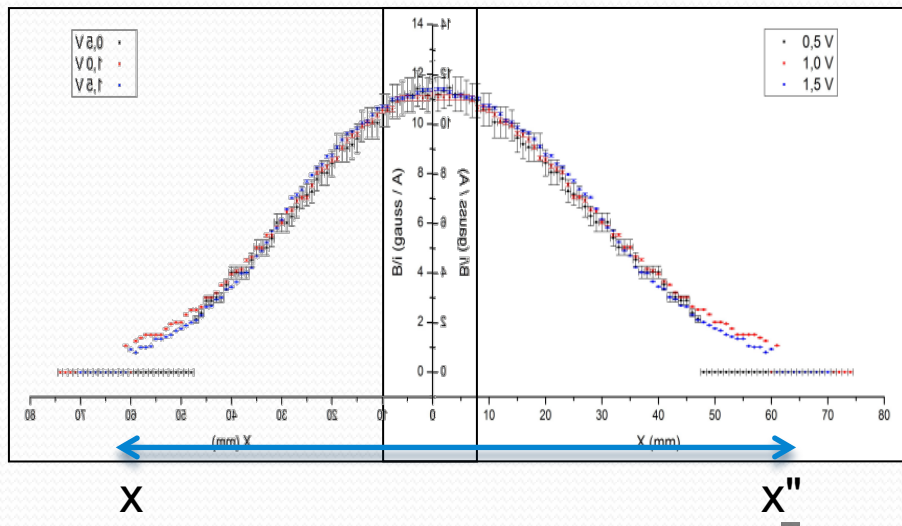
A mesma coisa pode ser feita para o campo magnético:

$$\vec{F}_m = q_e \vec{v}_{0x} \times \vec{B}_z$$

- O impulso I_M que o elétron recebe:

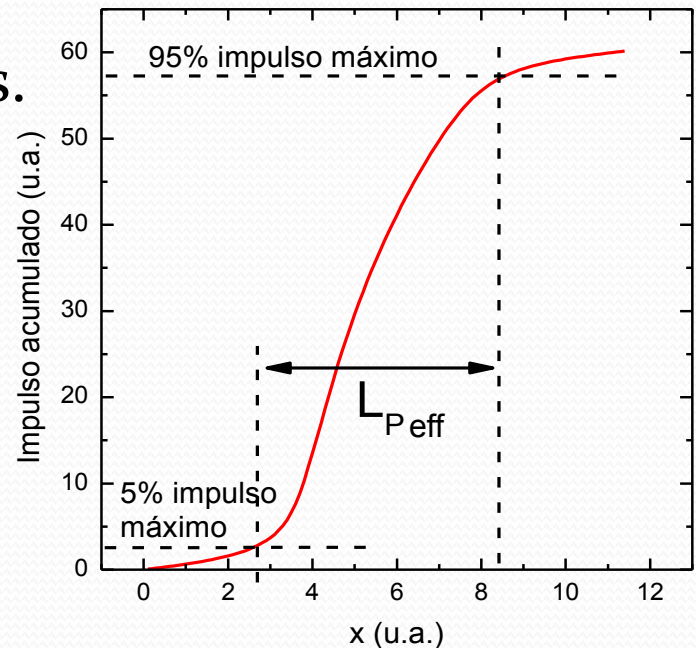
$$\vec{I}_M = \Delta \vec{p} = \int_0^t \vec{F}_M(t) dt = \int_x^{x''} q_e v_{0x} \frac{B(x)}{v_{0x}} dx \quad t = \frac{x}{v_{0x}} \rightarrow dt = \frac{dx}{v_{0x}}$$

Medido



A vantagem de $L_{P\text{eff}}$ e $L_{B\text{eff}}$ pelo impulso

- No caso do impulso, como a variação dele é mais rápida, fica mais fácil determinar os L 's efetivos:
 - Um critério razoável é área que tem a maior contribuição está entre 5% e 95% do valor máximo do impulso: esses limites definem os L 's efetivos.
 - Veja onde esses limites estão em relação aos respectivos campos.
 - Com os L 's efetivos pode-se obter os outros parâmetros: d_{eff} e β_{eff} .





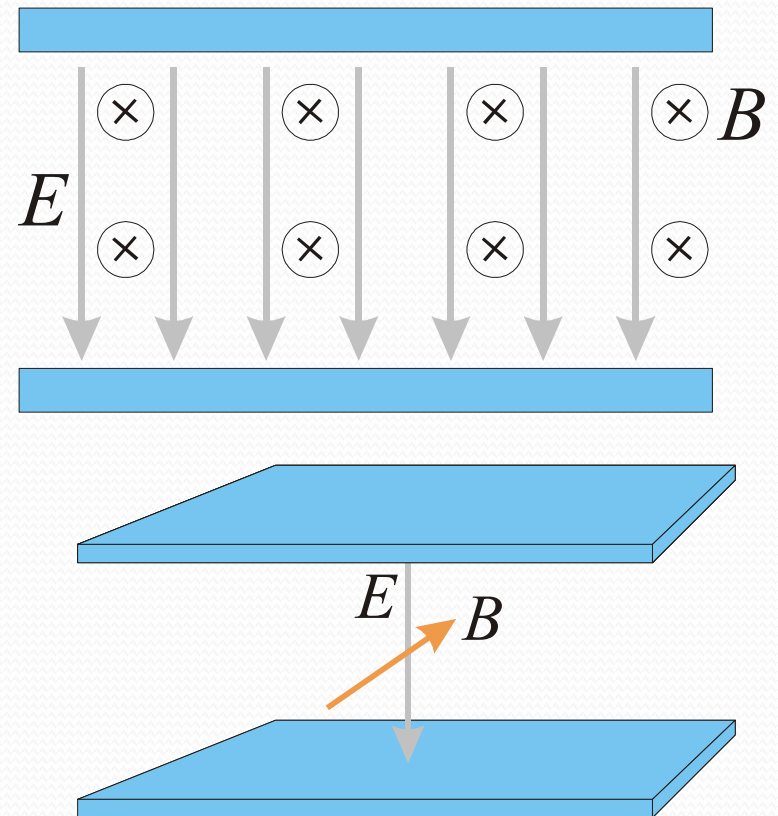
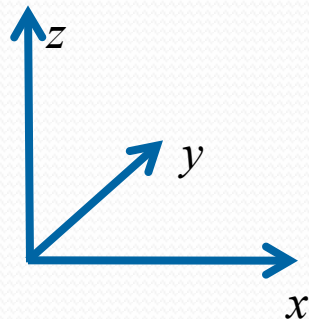
3. Calibração do Seletor

Objeto de estudo: o Filtro de Wien

- O filtro de Wien consiste de uma configuração de campo elétrico e magnético cruzados (perpendiculares) e perpendiculares à velocidade *inicial* da partícula incidente

Podemos resolver se simplificarmos o problema...

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



Movimento em campo idealizado

- Vamos considerar os campos E_y e B_z constantes e resolver o movimento na região onde $\mathbf{Fr} \neq 0$

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



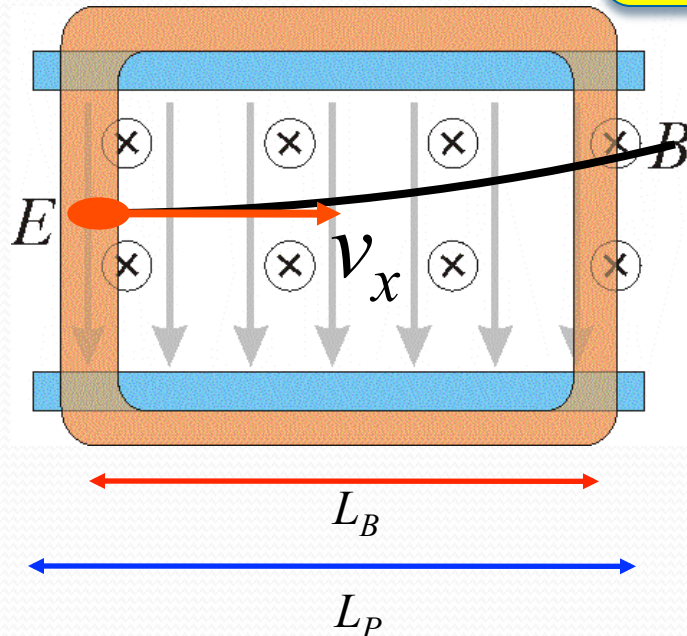
$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B \hat{k}$$

$$\vec{E} = -E \hat{y}$$

$$B(v_x \hat{k} - v_z \hat{i})$$



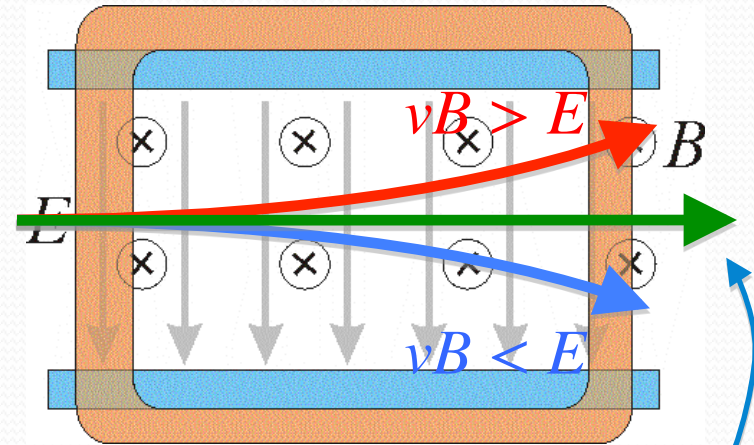
$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q(v_x B - E) \hat{k} - qBv_z \hat{i}$$

Precisamos resolver?

Vamos olhar de perto este seletor

- Qual é a condição na qual a partícula não sofre desvio?

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = q(v_x B - E) \hat{k} - qBv_z \hat{i}$$



- Condição de força resultante nula:

v_z inicial é nula. Se não houver força em Z isto não muda

$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

$$\vec{F} = q(v_x B - E) \hat{k} - qBv_z \hat{i} = 0$$

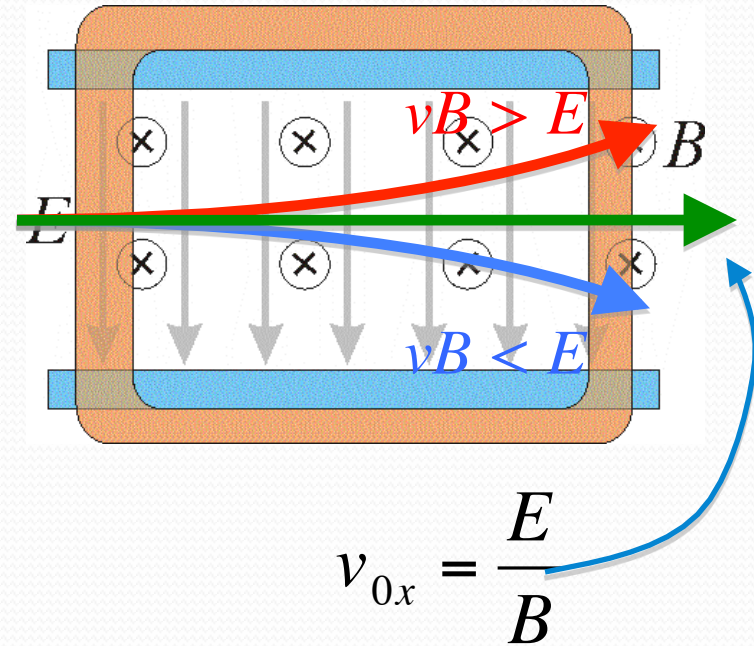
$$v_{0x} B - E = 0 \quad v_{0x} = \frac{E}{B}$$

Se a velocidade da partícula for igual à razão entre campo elétrico e magnético o desvio sofrido é nulo

Calibração do seletor

- Nós sabemos também que o campo elétrico é proporcional à tensão entre as placas e que o campo magnético é proporcional à corrente nas bobinas, ou seja:

$$|\vec{E}| = \frac{V_P}{d}, \quad |\vec{B}| = \beta i$$



Calibração do seletor

- Ou seja, para a velocidade de filtro, sem desvio:

$$v_{0x} = \frac{E}{B}$$

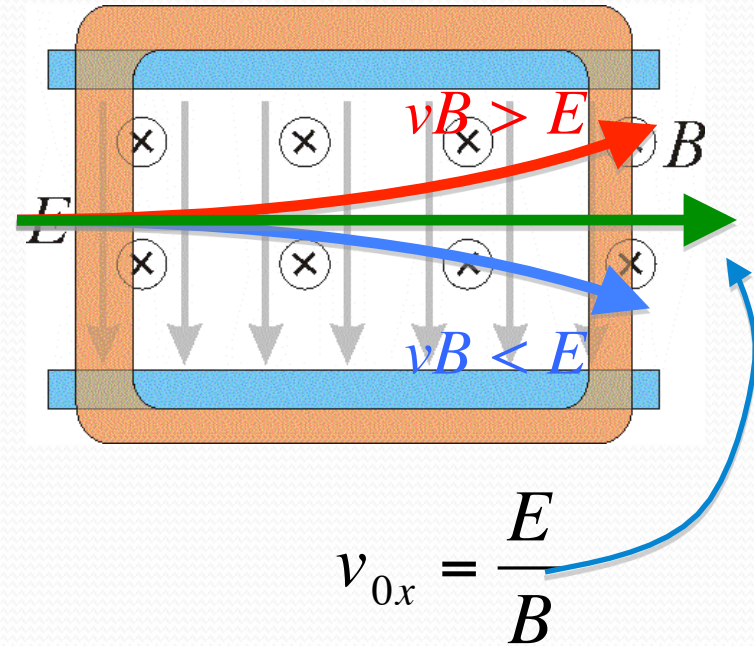
- Podemos fazer que:

$$v_{0x} = \frac{1}{\beta d} \frac{V_P}{i}$$

- Ou seja:

$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

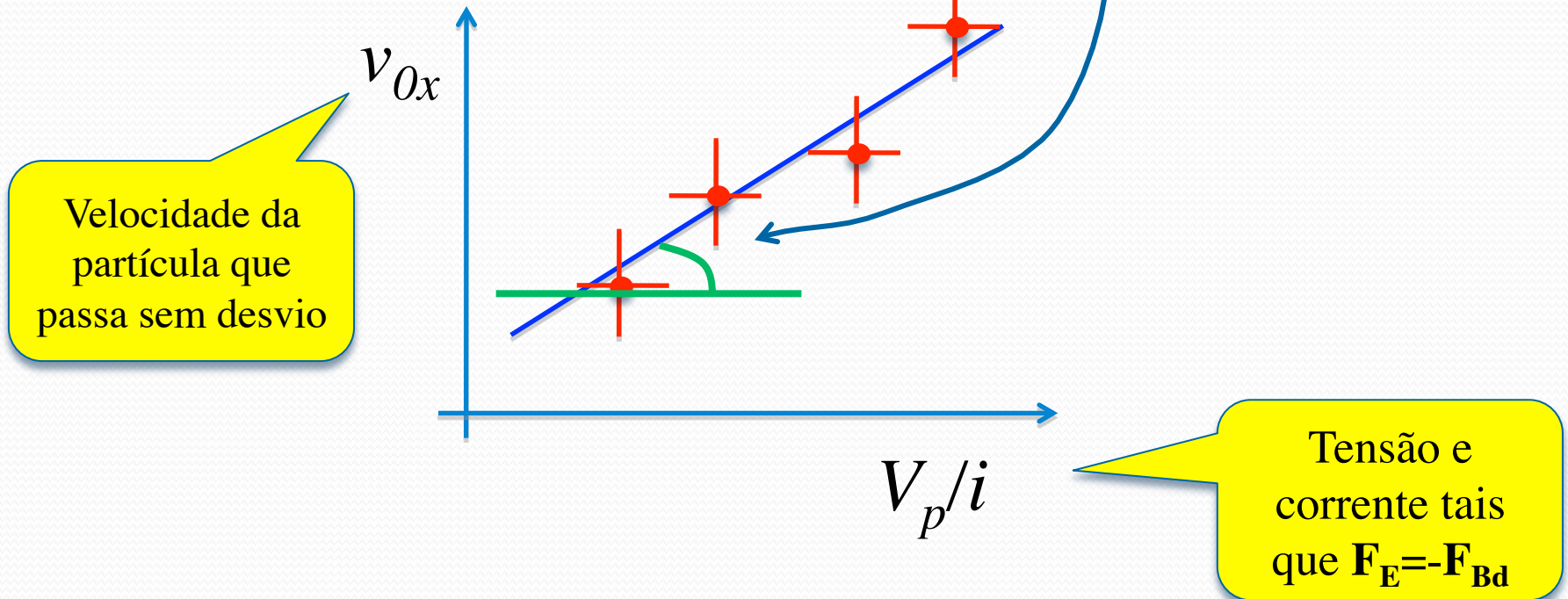
Selecionamos as velocidades apenas controlando V_p e i .
 α é a constante de calibração!



Como calibrar o seletor e obter α ?

- Precisamos fazer o gráfico

$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

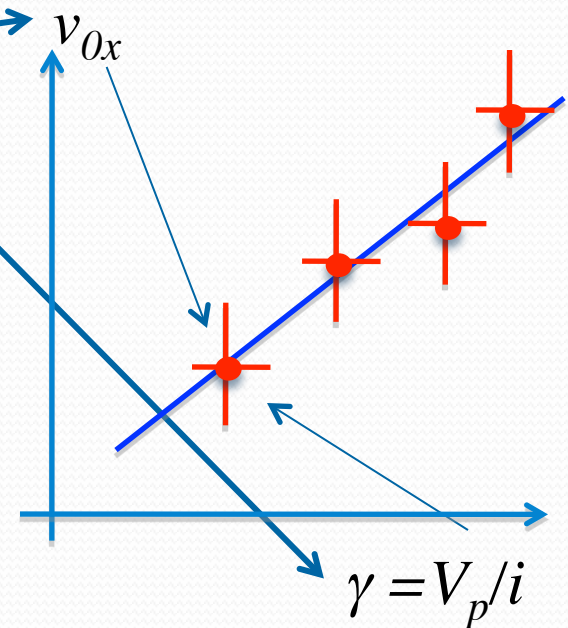
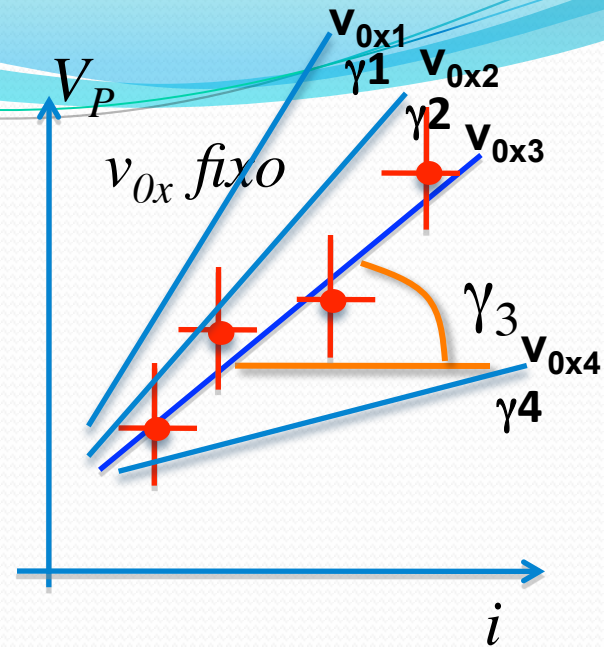


- Como obter cada ponto do gráfico de forma precisa?

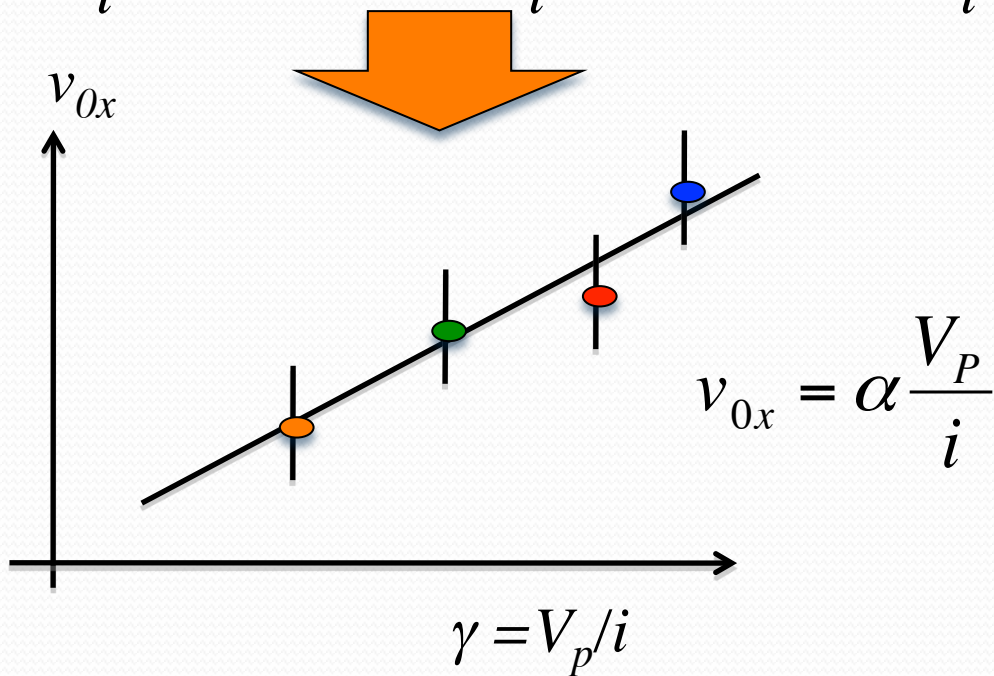
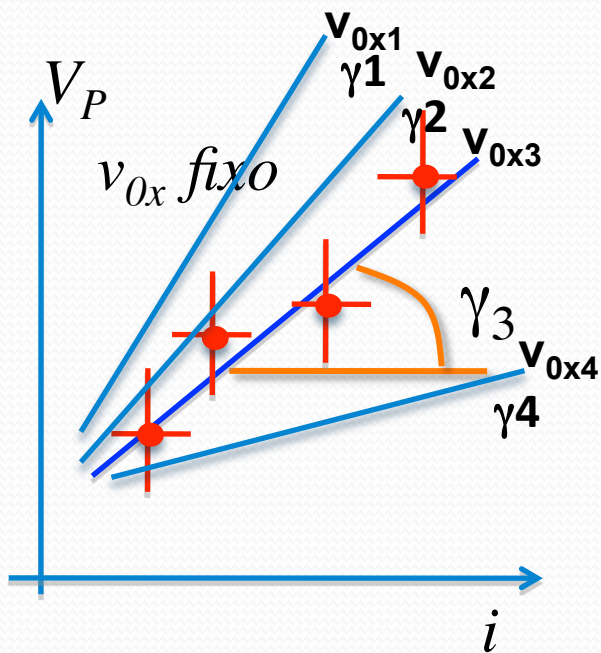
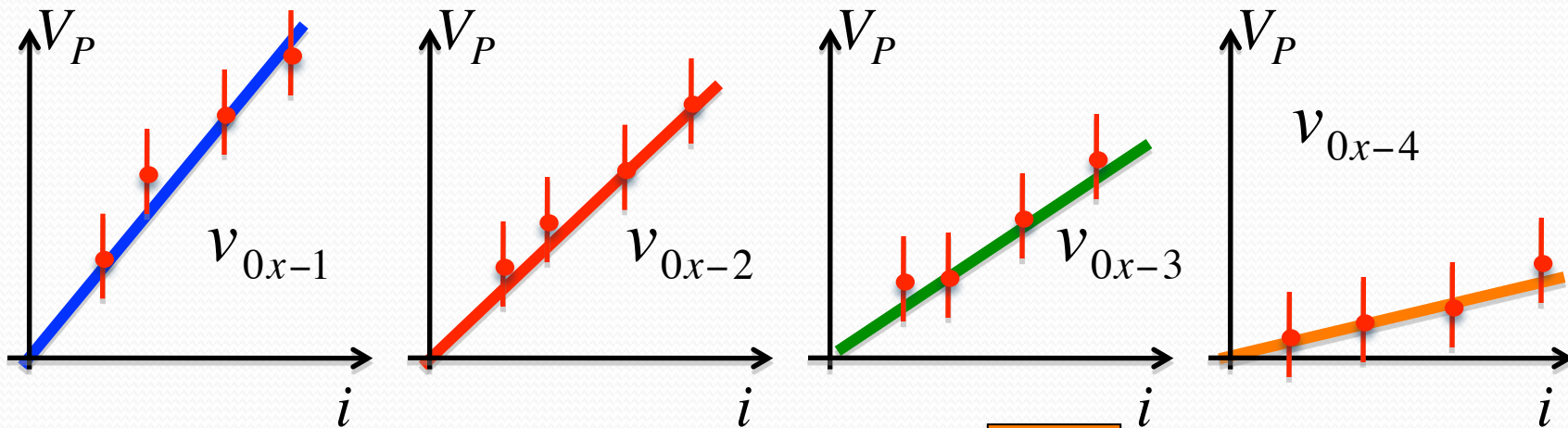
Procedimento

$$v_{0x} = \alpha \frac{V_P}{i}$$

- Selecione uma tensão de aceleração (V_{AC}) e obtenha v_{0x} .
- Com tensão entre as placas NULA ($V_P = 0$)
 - 1) Ajuste a corrente (i) para que o deslocamento devido ao campo magnético seja 1 cm. Meça i .
 - 2) Ajuste a tensão entre as placas para compensar este deslocamento e voltar a partícula para a origem. Meça V_P .
 - 3) Repita os passos (1)-(2) para $h=1, 2, 3$ cm, etc..
 - 4) Faça o gráfico de V_P em função de i para estes dados (estão todos no mesmo v_{0x}).
 - 5) O coeficiente angular obtido é a razão $\gamma = V_P/i$ para o v_{0x} selecionado.
- Repita os passos acima para, pelo menos, mais 3 valores de v_{0x} (V_{AC}) e faça o gráfico v_{0x} vs γ .
 - Total de pelo menos 4 pontos



Calibração do seletor



Para entregar – Parte 2

- Calibrar o seletor de velocidades
 - Obter a constante $\underline{\alpha}$ que relaciona a velocidade selecionada com a tensão entre as placas e a corrente nas bobinas
 - Um único gráfico com os ajustes de V_p em função da corrente, uma curva/ajuste para cada v_{0x}
 - Gráfico ajustado de v_{0x} em função de V_p/i , pontos estes obtidos dos ajustes acima.
 - Uma vez calculado $\underline{\alpha}$, use o $\underline{\beta}$ estimado na parte 1 para obter a distância efetiva entre as placas do capacitor ideal (d_{eff})
 - Compare com o valor nominal e discuta à luz da simulação de E e dos efeitos de borda.

Para entregar – Parte 3

- Desenvolver uma simulação numérica do experimento!
 - Objetivo: simular a trajetória do elétron, com velocidade inicial v_{0x} e sujeito a campos ideais E_y e B_z , para encontrar a posição de impacto na tela do TRC.
 - Podem usar a linguagem que preferirem!
 - Os campos elétrico e o magnético são considerados ideais: usem os parâmetros estimados para o capacitor e para as bobinas.
 - Simule a trajetória do elétron e faça um gráfico **X-Y** para o caso que ele passa sem desvio:
 - $v_{0x}=0.05c$, $E_y=+5000$ V/m e o valor de B_z necessário
 - Como é a trajetória na região dos campos? É uma reta?
- Proponha um método, com esta instrumentação e/ou com ajuda da sua simulação, para determinar a massa da partícula.

Dica 1 – Algoritmo

- Inicializar vetor posição no ponto de partida.
 - $\mathbf{X} = (x_0, 0, 0)$
- Calcular velocidade inicial, q $V_{ac} = m_e v_0^2/2$
 - $\mathbf{v}_e = (v_{e0}, 0, 0)$
- Loop no tempo, com passo dt
 - Qual o campo elétrico em \mathbf{X} ? $\Rightarrow \mathbf{F}_e = q \mathbf{E}(\mathbf{X})$
 - Qual o campo magnético em \mathbf{X} ? $\Rightarrow \mathbf{F}_m = q \mathbf{V} \times \mathbf{B}(\mathbf{X})$
 - Aceleração neste ponto, $\mathbf{A} = (\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m)/m_e$
 - Atualizar posição \mathbf{X} e velocidade \mathbf{v}_e
 - $\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{X}(t) + \mathbf{v}(t) \Delta t + \mathbf{a}(t) \Delta t^2 / 2$
 - $\mathbf{V}(t+1) = \mathbf{V}(t) + \mathbf{a}(t) dt$
- Gravar \mathbf{X} , \mathbf{v}_e , \mathbf{E} , \mathbf{B} , para cada "time-step", para analisar depois.

Dica 1 - Algoritmo

