Prof. Antonio Domingues dos Santos
adsantos@if.usp.br
Ramal: 6886
Mário Schenberg, sala 205

Faraday

http://lababerto.if.usp.br

Prof. Leandro Barbosa
lbarbosa@if.usp.br
Ramal: 7157
Ala1, sala 225

Física Exp. 3
Aula 3, Experiência 3
RL e RC

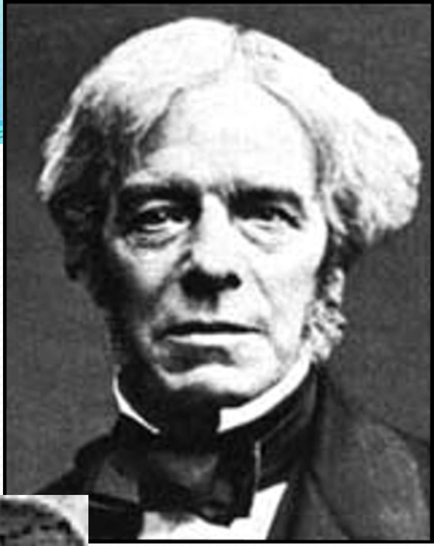
Profa. Eloisa Szanto
eloisa@dfn.if.usp.br
Ramal: 7111
Pelletron

Prof. Henrique Barbosa
hbarbosa@if.usp.br
Ramal: 6647
Basílio, sala 100

Prof. Nelson Carlin
nelson.carlin@dfn.if.usp.br
Ramal: 6820
Pelletron

Prof. Paulo Artaxo
artaxo@if.usp.br
Ramal: 7016
Basilio, sala 101

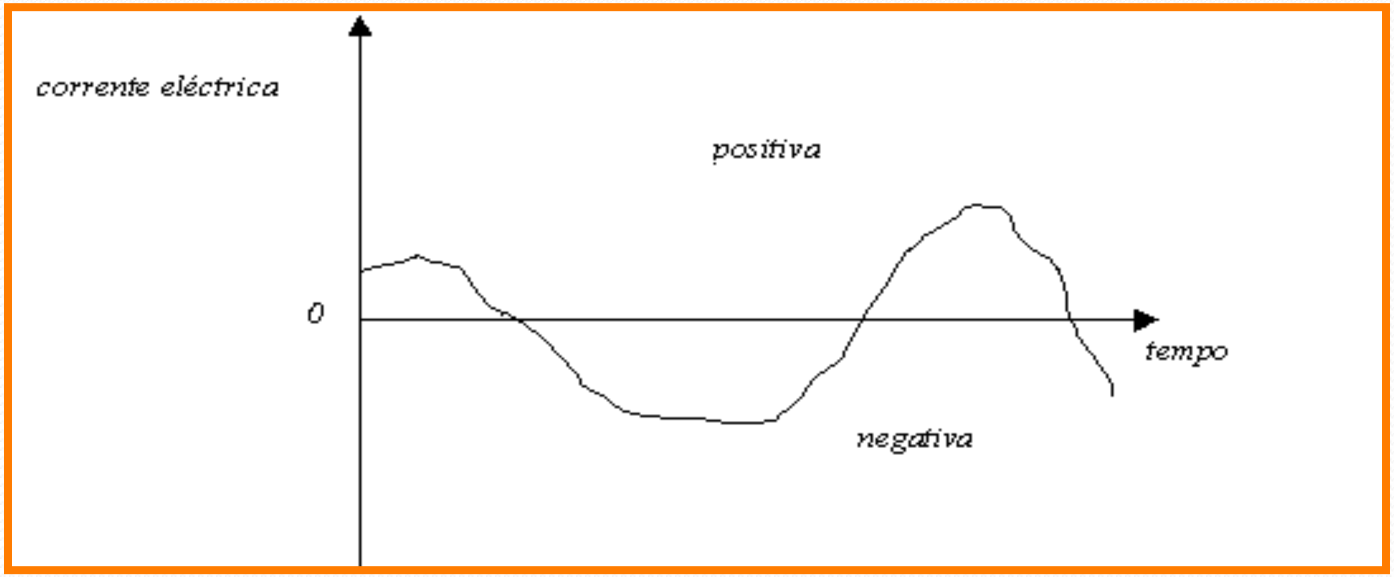
Correntes Alternadas e Faraday



1791-1867

Corrente alternada

- Tensão alternada: qualquer tensão que varia no tempo

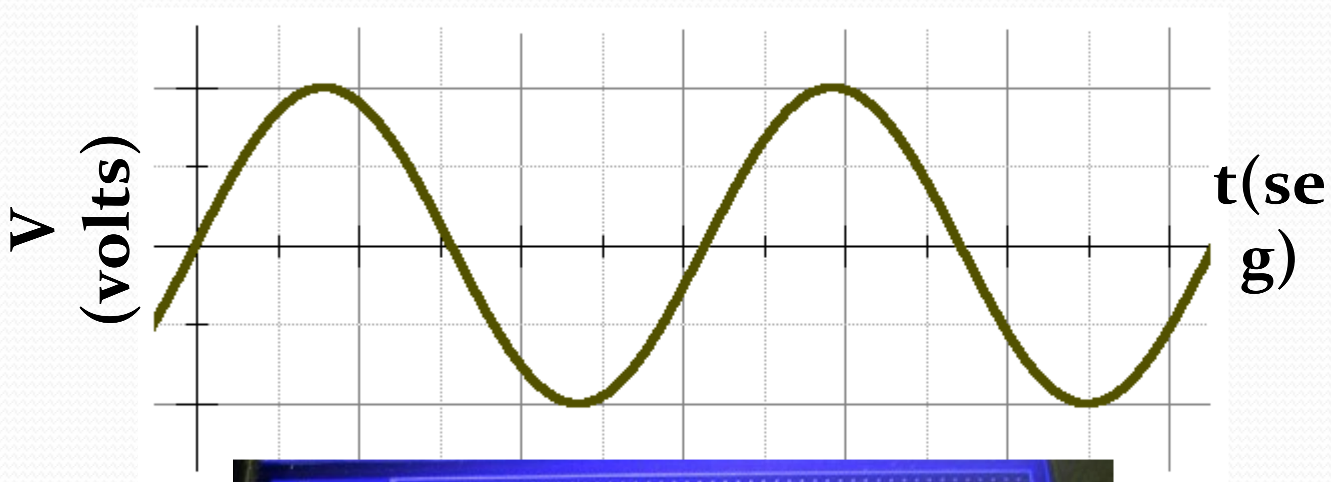


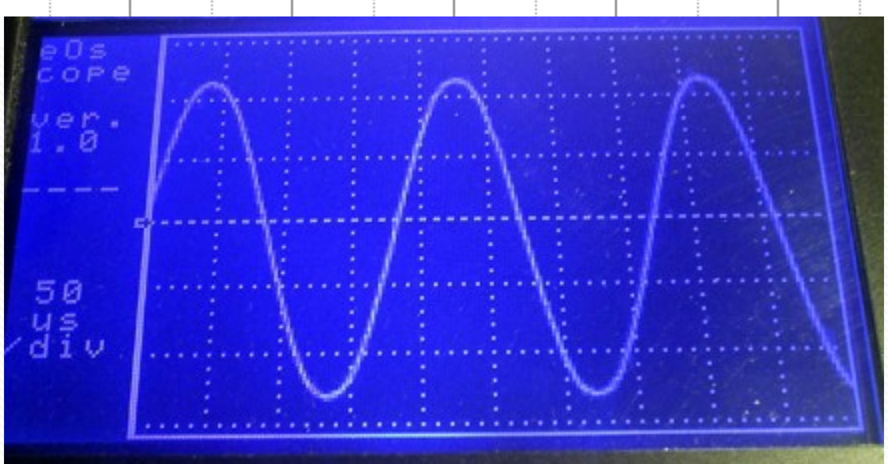
- Nesta experiência: tensões harmônicas simples

Importante: qualquer tensão dependente do tempo = superposição de tensões harmônicas simples

Tensão alternada

- Na grande maioria dos usos a tensão (ou corrente) é descrita por uma função harmônica simples:
  - por exemplo na sua casa, a D.D.P. fornecida é senoidal:



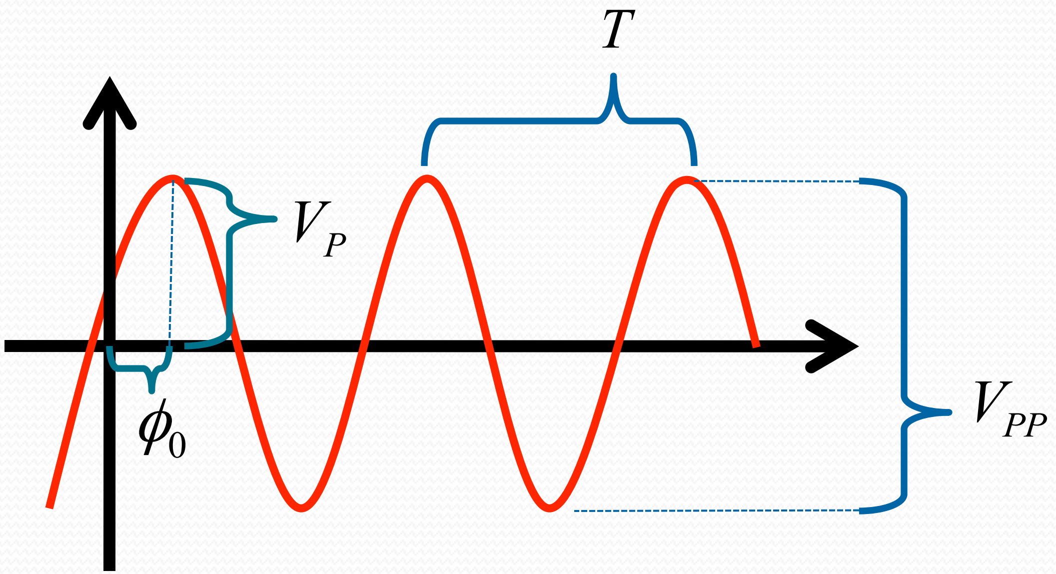


127V, 60Hz

Tensão harmônica

- Como descrever matematicamente uma tensão senoidal?
  - V_P é a tensão máxima ou tensão de pico ou amplitude
  - ω é a freqüência angular
  - ϕ_o é a fase da tensão alternada no instante **t=o**

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0)$$



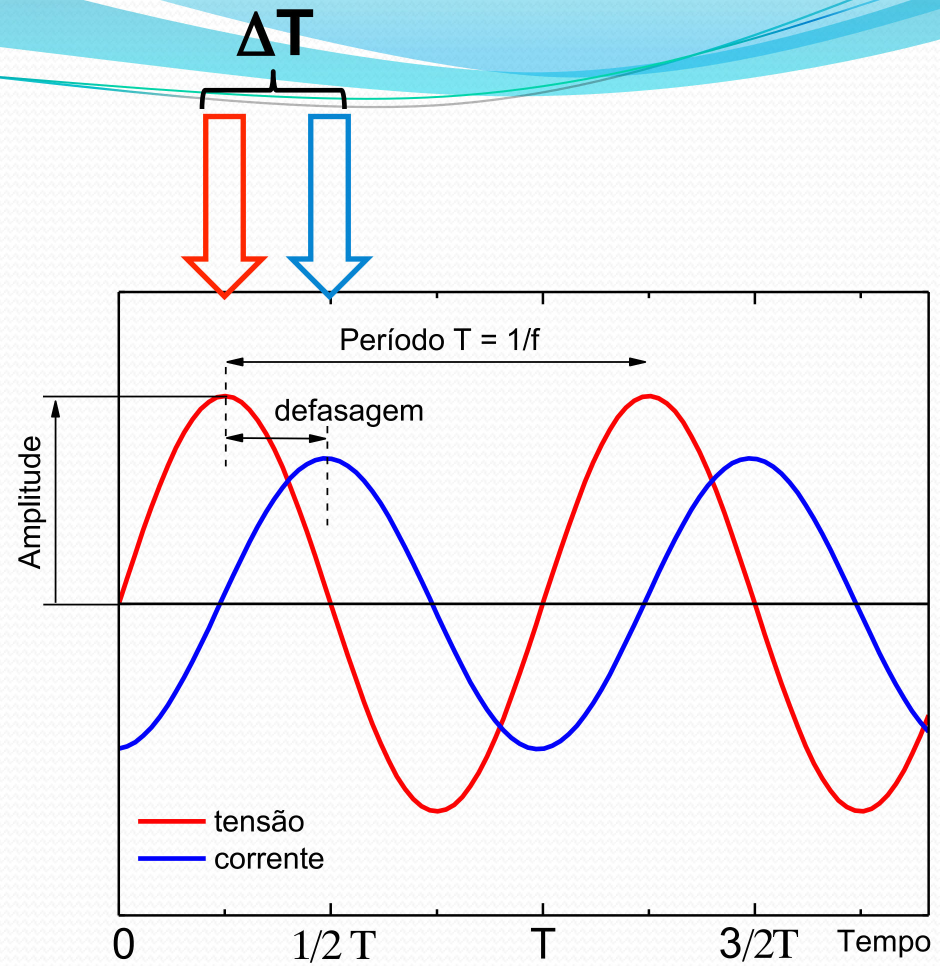
$$\omega = 2\pi f \qquad T = \frac{1}{f}$$

$$V_{PP} = 2V_p$$

$$V_{ef} = \frac{V_P}{\sqrt{2}}$$

A fase

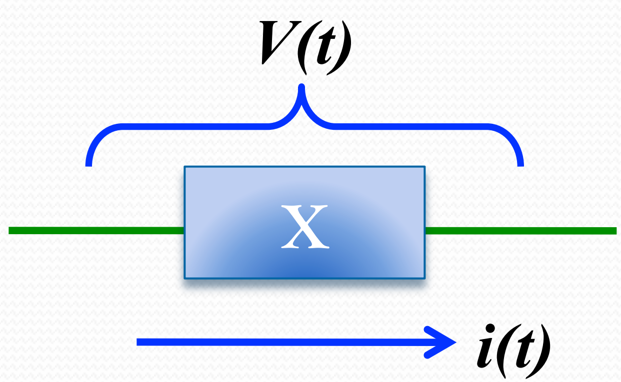
- Em um circuito de corrente alternada a tensão e corrente não estão necessariamente em fase:



$$V(t) = V_P \sin(\omega t + \phi_0)$$

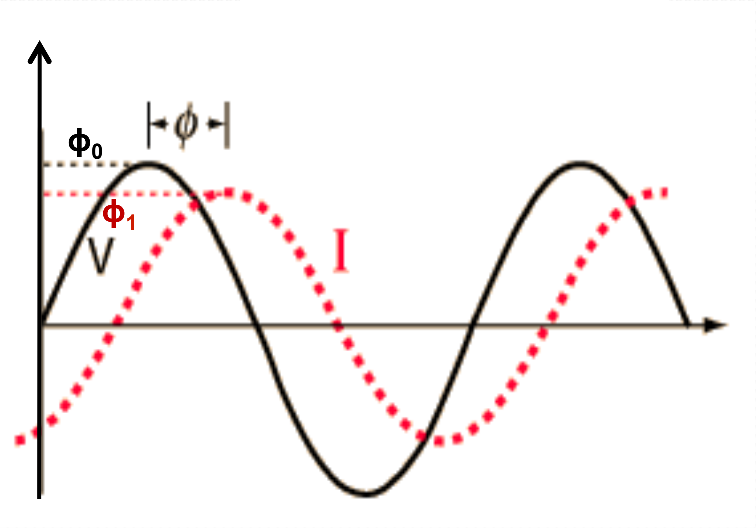
$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$\phi = 2\pi \frac{\Delta T}{T} = \omega \cdot \Delta T$$



Diferença de fase

- Neste caso é mais importante saber a diferença de fase entre a corrente e a tensão do que os valores de φ_o e φ_1. Porque?
  - Fase é uma fração de um ciclo (ou período) expressa em graus
  - Entre o início e o fim de um período há uma diferença de fase de 360º.
  - Um período corresponde a 360º, ½ corresponde a 180º, etc...



A tensão é alternada, então a escala de tempo é, de certa maneira, arbitrária

Potência Dissipada - **Instantânea**

- Qual é a potência dissipada no elemento?

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

- Ela depende da diferença de fase entre corrente e tensão no elemento!

$$i(t) = i_P sen(\omega t)$$
$$V(t) = V_P sen(\omega t + \phi)$$

$$P(t) = V_P i_p sen(\omega t) sen(\omega t + \phi)$$

- Portanto há um termo variável e outro constante!

$$P(t) = \frac{V_P i_p}{2}\cos(\phi) - \frac{V_P i_p}{2}\cos(2\omega t + \phi)$$

Potência média: mais útil

- O valor médio da potência num período **T** é:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_p i_P}{2}\cos\phi\, dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_P i_P}{2}\cancel{\cos(2\omega t + \phi)dt} \quad \mathbf{=0}$$

- A segunda integral é nula, mas a primeira não:

$$P(t) = \frac{1}{2}V_P i_P \cos\phi = \frac{V_P}{\sqrt{2}}\frac{i_P}{\sqrt{2}}\cos\phi$$

- Chama-se de valor eficaz da tensão, $\mathbf{V_{ef}}$, o valor $\mathbf{V_P/\sqrt{2}}$ e valor eficaz da corrente, $\mathbf{i_{ef}}$, o valor $\mathbf{i_P/\sqrt{2}}$

$$P(t) = V_{ef}\, i_{ef} \cos\phi_0$$

Potência média

- Ela depende, além das tensões e correntes, também da defasagem!

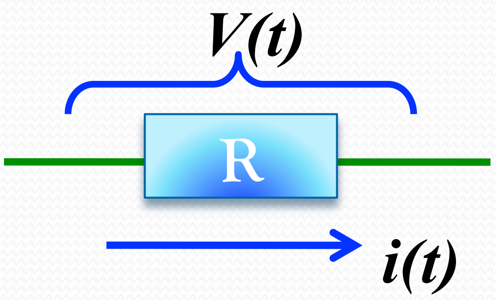
$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi) \qquad\qquad i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} V_P i_P \cos\phi$$

- Agora pode-se calcular a potência média, por ciclo, transferida ao elemento de circuito, seja ele, resistivo, capacitivo, indutivo ou misto.

Exemplo 1: Resistor ôhmico

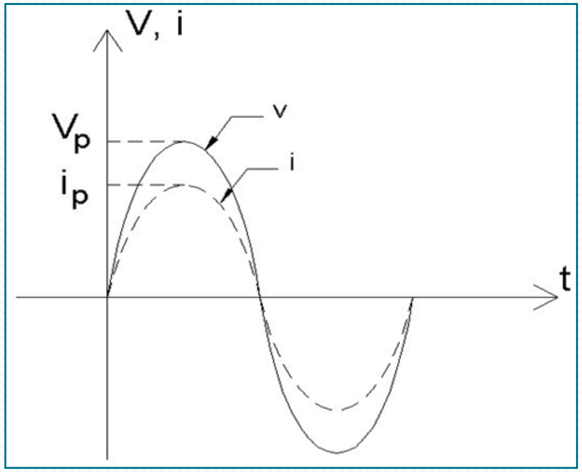
- A lei de Ohm diz que V =R i, onde R é uma constante se o resistor for ôhmico. Assim, se a tensão estiver variando, temos que:



$$V(t) = Ri(t)$$

$$V(t) = V_P sen(\omega t + \phi_0)$$

$$i(t) = \frac{V_P}{R} sen(\omega t + \phi_0)$$

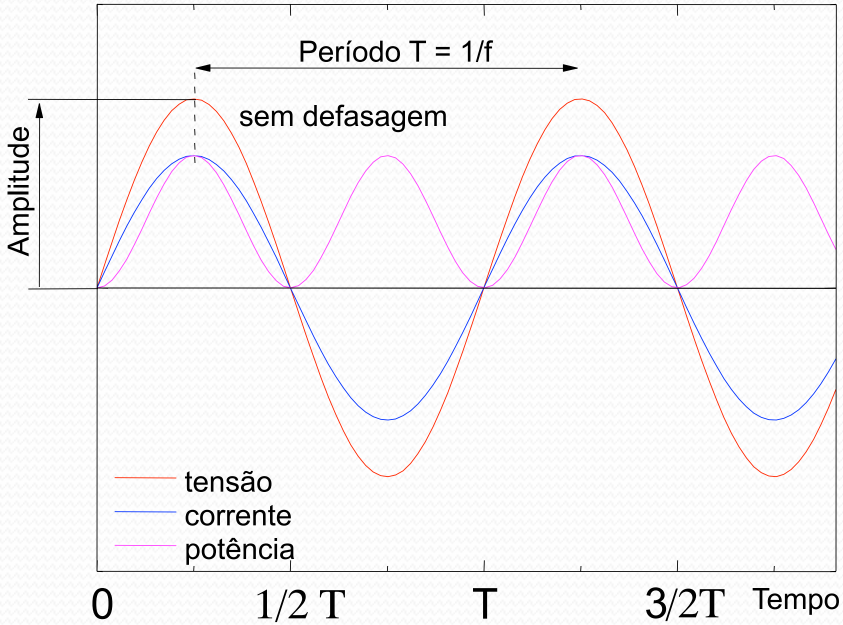


- Como as fases φ_o são iguais, então que a corrente e a tensão no resistor estão em fase!

Exemplo 1: Resistor ôhmico

- Para um **resistor ôhmico**, teremos então que:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) = V_p i_P sen^2(\omega t) \quad > 0, \text{ sempre}$$



•A potência varia no tempo mas é sempre positiva o que significa que o resistor sempre consome potência!

Exemplo 2: Capacitor Ideal

Em um capacitor ideal, a capacitância é dada pela razão entre carga acumulada e tensão elétrica, ou seja:

$$C = \frac{q(t)}{V(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Além disso, carga e corrente estão relacionados

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t)$$

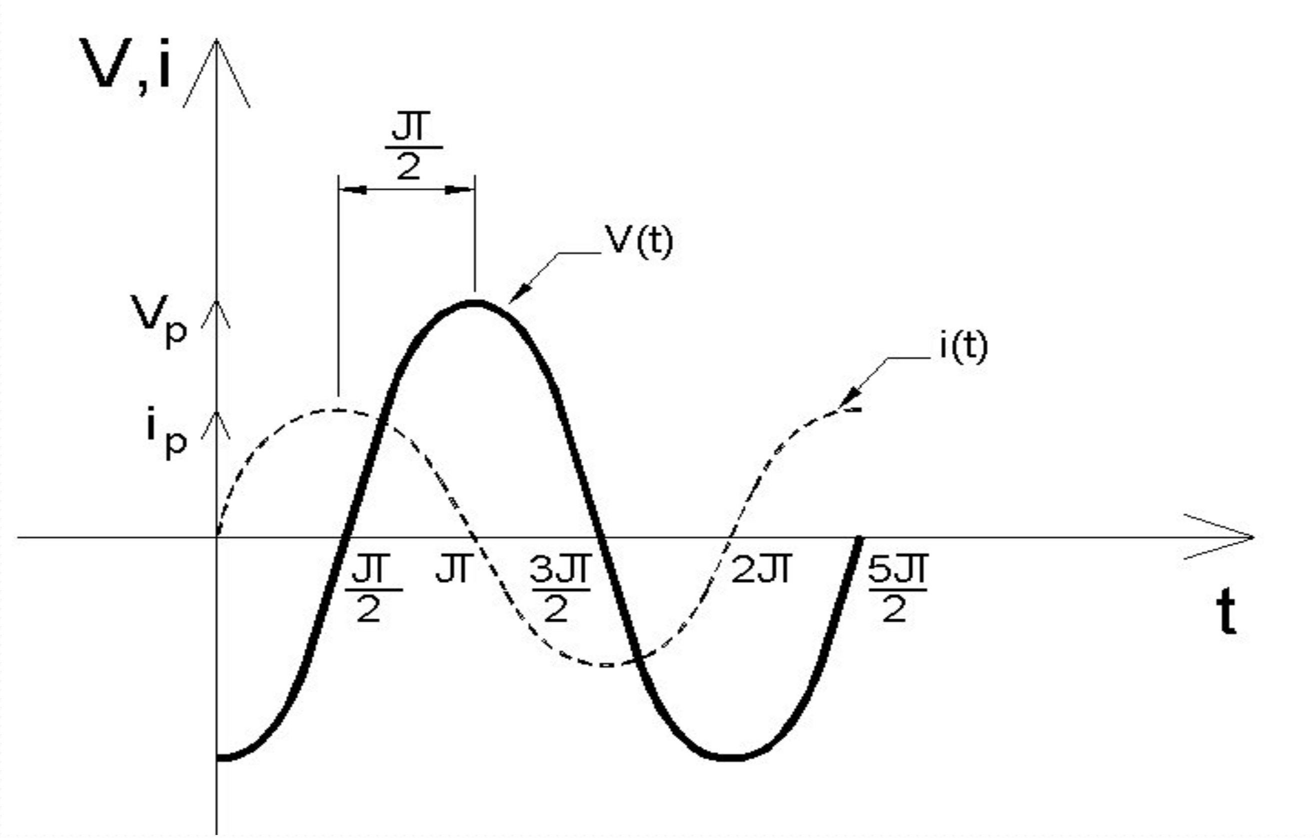
Portanto:

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = V_P \sin(\omega t) = V_P \cos(\omega t - \pi / 2)$$

$$i(t) = \omega C V_p \cos(\omega t)$$

A fase não é nula!

Exemplo 2: Capacitor Ideal



a corrente está adiantada de π/2 em relação à tensão aplicada ao capacitor (Atenção: a defasagem de π/2 é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).

Exemplo 2: Capacitor Ideal

- A potência em um capacitor pode ser escrita como

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

(-π/2) - (0) = -π/2

$$P(t) = \left(V_p \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \right) \left(\omega C V_p \cos(\omega t) \right)$$

(0) - (π/2) = -π/2

$$= \left(\frac{i_p}{\omega C} \sin(\omega t) \right) \left(i_p \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \right)$$

- Atenção, a diferença de fase = **Fase Tensão – Fase Corrente**

Exemplo 3: Indutor ideal

- Em um indutor ideal, a tensão é dada por:

$$V(t) = L\frac{di}{dt}$$

- Portanto, se a corrente no indutor é:

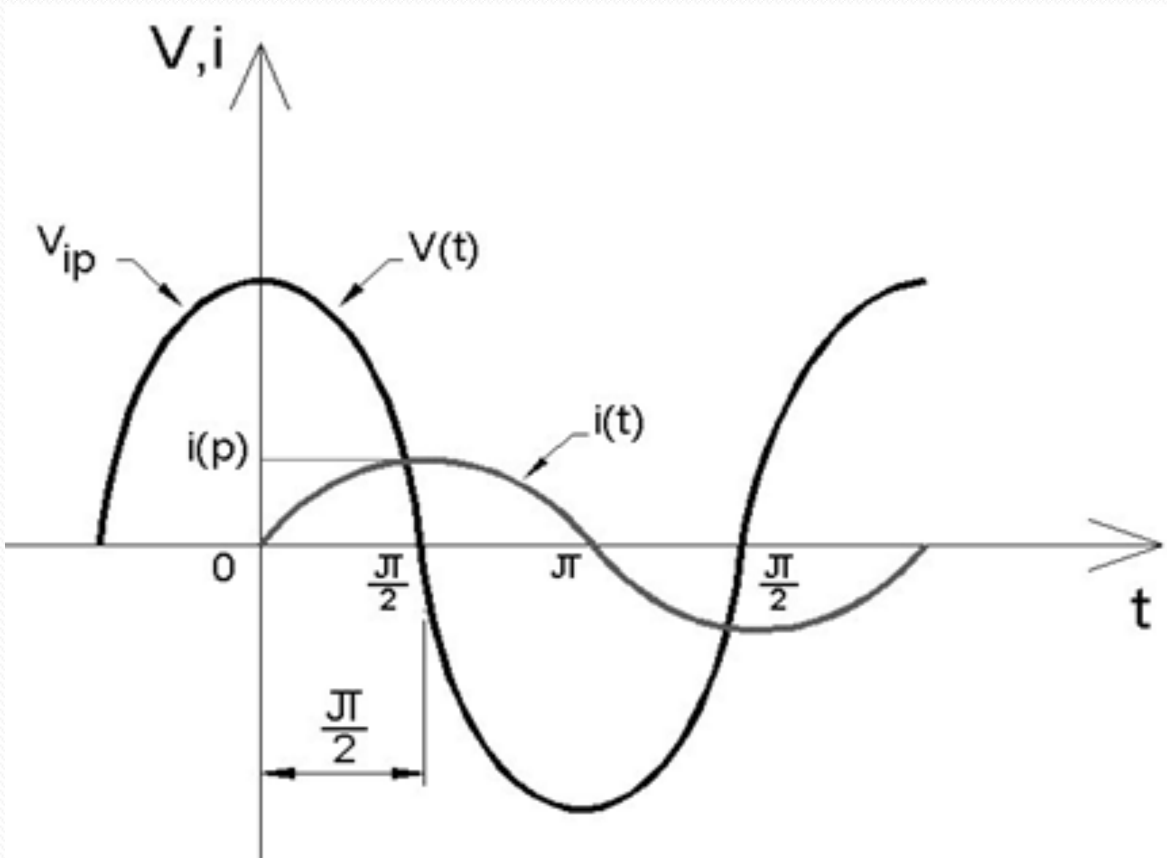
$$i(t) = i_P \cos(\omega t)$$

A fase não é nula!

- Então, temos:

$$V(t) = L\frac{di}{dt} = -L\omega i_P \sin(\omega t) = L\omega i_P \cos(\omega t + \pi/2)$$

Exemplo 3: Indutor ideal



- a corrente está atrasada de π/2 em relação à tensão aplicada ao indutor (**Atenção**: a defasagem de π/2 é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o indutor e **<u>não quaisquer outras</u>**).

Exemplo 3: Indutor Ideal

- A potência em um indutor pode ser escrita como:

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$

$$P(t) = \left(V_p \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \right) \left(\frac{V_p}{\omega L} \cos(\omega t) \right)$$

(π/2) - (0) = +π/2

$$= \left(\omega L i_p \sin(\omega t) \right) \left(i_p \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

(0) - (-π/2) = +π/2

- Atenção, a diferença de fase = **Fase Tensão – Fase Corrente**

Potência - Revisão

Muito difícil acompanhar os sinais e as trocas de sin(x) por sin(90-x)... Vamos introduzir uma nova notação, mais genérica e mais simples!

- Para o resistor:

$$P(t) = Ri_P{}^2 sen^2(\omega t)$$

- Para o capacitor:

1/wC é como se fosse a "resistência" do capacitor!

$$P(t) = \frac{i_p{}^2}{\omega C} \sin(\omega t) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Mas essa "resistência" introduz uma fase!

- Para o indutor:

wL é como se fosse a "resistência" do indutor!

$$P(t) = \omega L i_p{}^2 \sin(\omega t) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Mas essa "resistência" introduz uma fase!

Números Complexos

$$\hat{C} = a + b\,j \qquad j = \sqrt{-1}$$

$$\hat{C} = C\,e^{j\alpha} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega\,e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}$$

Integrais e derivadas nesta notação são apenas multiplicações e divisões

Formalismo Complexo

- Este formalismo é construído de tal forma a facilitar todos os cálculos que envolvem tensões alternadas
- Vamos definir as tensões e correntes complexas como sendo:

$$\hat{V}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)} \quad \Rightarrow \quad V(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{V}(t)\right) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\hat{i}(t) = i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)} \qquad\qquad i(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{i}(t)\right) = i_0 \cos(\omega t + \phi_1)$$

Impedância Complexa e Real

A impedância complexa de um elemento X é definida como sendo a razão entre a tensão e corrente complexas neste elemento, ou seja:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$

Usando a definição das tensões e correntes complexas, deduzimos que:

$$\hat{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_0 e^{j(\omega t + \phi_1)}} = \frac{V_0}{i_0} e^{j(\phi_0 - \phi_1)} = Z_0 e^{j\phi}$$

Z_0 cos(phi) é a impedância REAL do elemento X

ϕ é a diferença de fase entre a tensão e corrente causada pelo elemento X

A impedância NÃO varia com o tempo. É uma grandeza característica do elemento X

Resistência e Reatância

- Da definição de impedância complexa:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi}$$

- Podemos escrever também que:

$$\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$$

- Define-se resistência (R) de um bipolo como sendo:

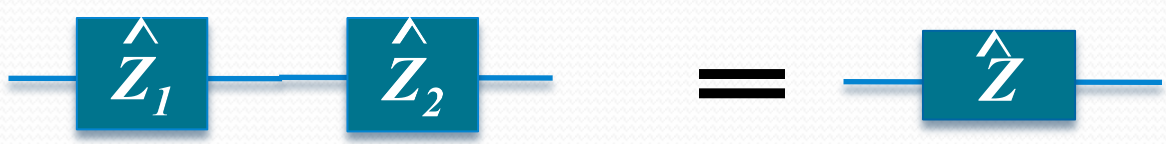
$$R = Z_0 \cos(\phi)$$

- E reatância deste bipolo (X)

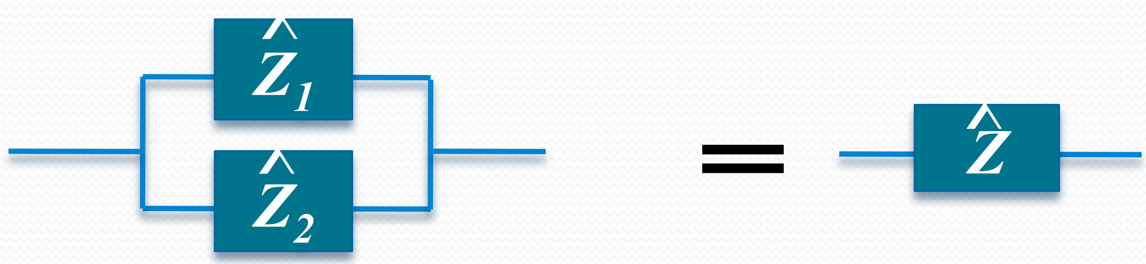
$$X = Z_0 \sin(\phi)$$

Porque usar este formalismo?

- As grandes vantagens deste formalismo são:
  - Operações envolvendo tensão e corrente são simples
    - Multiplicações e divisões de exponenciais
  - Associações de bipolos tornam-se simples
    - Como resistores comuns, mas realizadas com grandezas complexas



$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2$$

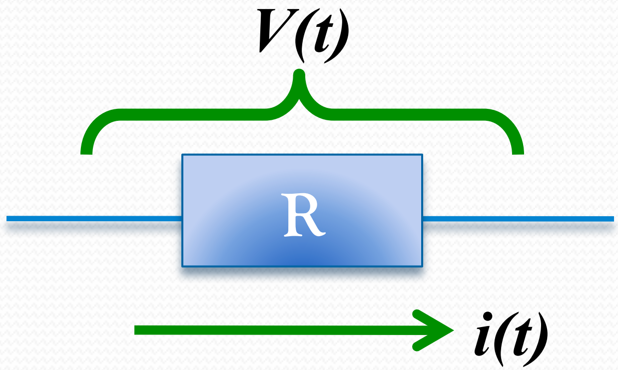


$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2}$$

Exemplo 1: Resistor

- Seja uma tensão e corrente complexas, temos:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)}$$



- Mas sabemos que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{V}/\boldsymbol{i}$, ou seja, a corrente e tensão estão sempre em fase. Assim:

$$\hat{Z} = Z_0 e^{j\phi} = R \quad \Rightarrow \begin{cases} Z_0 = R \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Por conta disto que resistores Ôhmicos são muito utilizados em laboratório para medir correntes

Exemplo 2: Capacitor

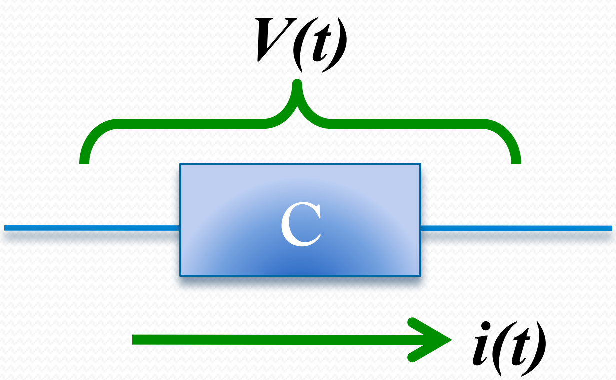
- Sabemos (do começo da aula) que $V(t) = \dfrac{1}{C}\int i(t)dt$

- Se a corrente complexa for dada por: $\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$

- Fica fácil demonstrar que $\hat{V}(t) = -\dfrac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}$

- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{-\dfrac{j}{\omega C} i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = -\frac{j}{\omega C}$$



Exemplo 2: Capacitor

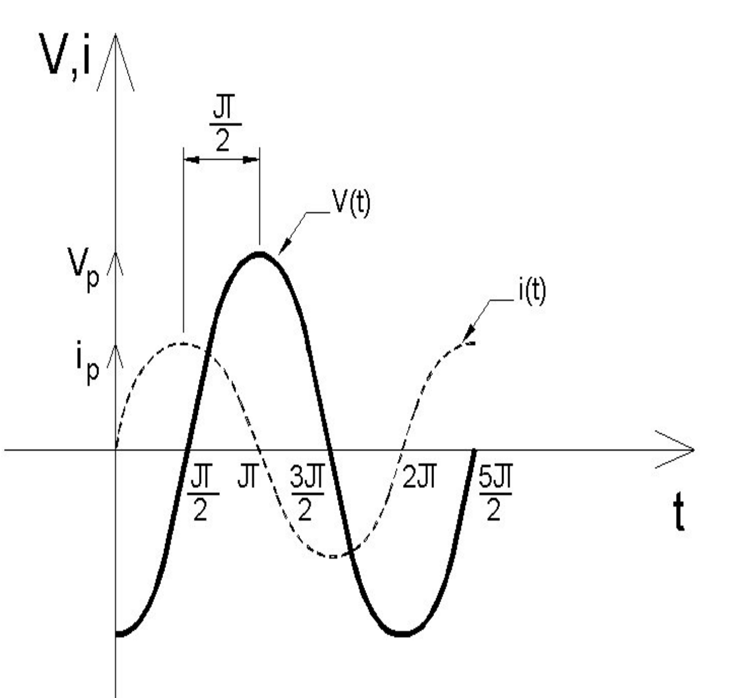
- Ou seja $$\hat{Z} = -\frac{j}{\omega C}$$

- Mas lembrando que: $$\hat{Z} = Z_0\cos(\phi) + jZ_0\sin(\phi)$$

- Comparando as duas expressões temos que:

$$Z_0 = \frac{1}{\omega C} \qquad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está defasada de π/2 em relação à corrente



Exemplo 3: indutor

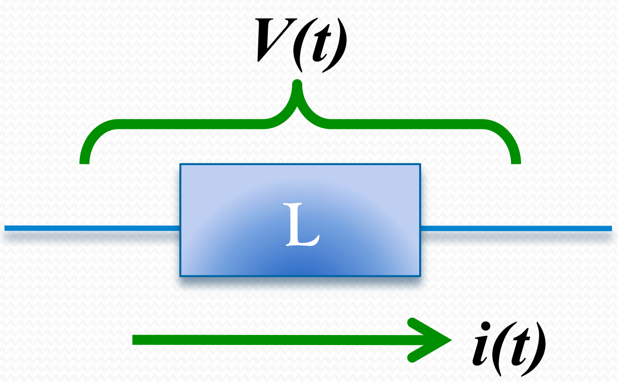
- Sabemos que $V(t) = L\dfrac{d}{dt}i(t)$

- Se a corrente complexa for dada por: $\hat{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$

- Fica fácil demonstrar que $\hat{V}(t) = j\omega L i_0 e^{j\omega t}$

- A impedância de um capacitor vale:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} = \frac{j\omega L i_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = j\omega L$$



Exemplo 3: Indutor

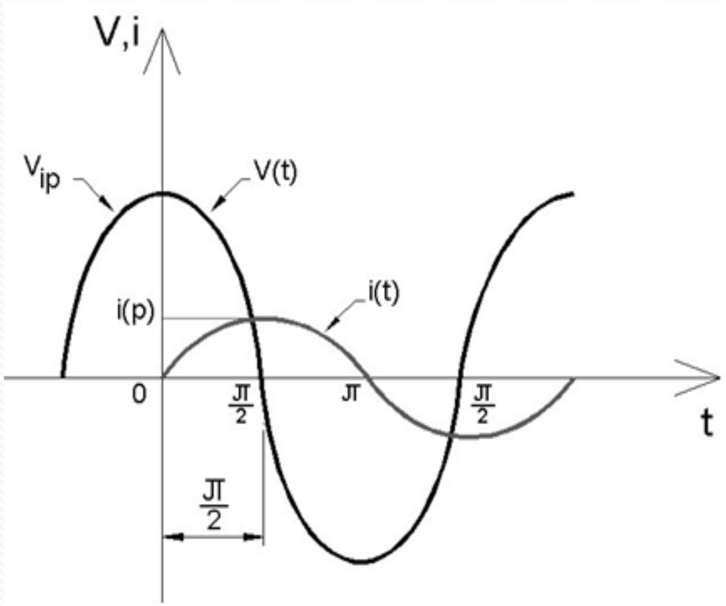
- Ou seja $\hat{Z} = j\omega L$

- Mas lembrando que: $\hat{Z} = Z_0 \cos(\phi) + jZ_0 \sin(\phi)$

- Comparando as duas expressões temos que:

$$Z_0 = \omega L \qquad \phi = +\frac{\pi}{2}$$

Conclui-se naturalmente que a tensão elétrica está adiantada de π/2 em relação à corrente



Mas o indutor é ideal?

- Bobinas são fios condutores muito longos enrolados, sua resistência elétrica é, em geral, significativa e não pode ser desprezada.
  - Raramente, o modelo de um indutor ideal pode ser usado para uma bobina comum.
  - As condições que temos: bobina, circuito e intervalo de frequência disponíveis, não é possível adotar o modelo de indutor ideal.
  - Pelo menos a resistência da bobina deve ser levada em conta. Isso significa que o modelo adotado para a bobina, não é mais o de uma indutância pura, mas de uma indutância pura ligada, em série, a uma resistência ôhmica.

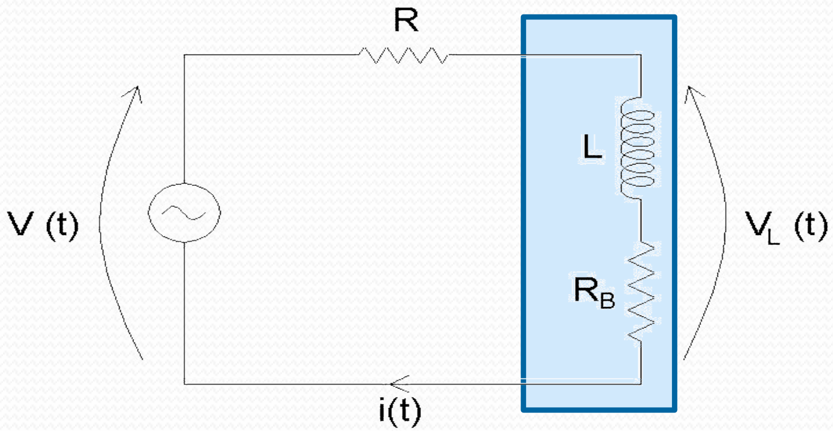
Indutor real: bobina

- **Indutor real: circuito, em série, de uma resistência e de uma indutância pura**
- A impedância complexa equivalente é a soma das impedâncias complexas de cada elemento. A impedância resistiva da bobina é $\mathbf{R_B}$ e a impedância complexa do indutor puro é $\mathbf{X_L}$:

$$\hat{Z} = j\omega L$$

- A impedância total:

$$\hat{Z} = R_B + j\omega L = Z_0 e^{j\varphi_0}$$



Impedância da bobina:

- O valor real da impedância da bobina:

$$Z_B = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R_B{}^2 + \omega^2 L^2}$$

R_B =resistência da bobina

L= indutância da bobina

- E a defasagem entre a tensão da associação em série **R_B + L** e a corrente que a percorre, vocês podem calcular:

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{\omega L}{R_B} \quad \text{ou} \quad \varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega L}{R_B}\right)$$

Bobina não é indutor puro

- Isso vai ter consequências no comportamento de indutores reais no circuito.
  - uma delas é que a defasagem não é mais $\pi/2$:
    - ela depende da frequência, da indutância e da resistência da bobina

- Vocês podem prever o que acontece com a potência!

Tarefas 1: Capacitor

- Medir a impedância do capacitor em função da frequência
  - Fazer um gráfico da impedância por frequência e verificar se a relação teórica prevista é obedecida
  - Relatório: também obter o valor da capacitância e comparar com os valores dos colegas
- Medir a diferença de fase entre a corrente e a tensão no capacitor e comparar com o valor previsto teoricamente.
  - Fazer um gráfico da fase por frequência verificar se a relação teórica prevista é obedecida
  - Relatório: também comparar também com os valores de seus colegas

Tarefas 2: Indutor

- Medir a impedância da bobina fornecida (250, 500 ou 1000 espiras) em função da frequência
  - Fazer um gráfico da impedância por frequência verificar se a relação teórica prevista é obedecida
  - Relatório: também obter o valor da indutância e comparar com os valores dos colegas e com o valor nominal
- Medir a diferença de fase entre a corrente e a tensão no indutor e comparar com o valor previsto teoricamente
  - Fazer um gráfico da fase por frequência verificar se a relação teórica prevista é obedecida
  - Relatório: também compare com os valores obtidos por seus colegas

Tarefas 3: relatório

- Além do que foi medido e com as diferenças de fase medidas calcule:
  - A potência média transferida ao resistor, por ciclo.
  - A potência média transferida ao capacitor, por ciclo.
  - A potência média transferida ao indutor, por ciclo.
- Qual o valor esperado? É compatível com o medido?

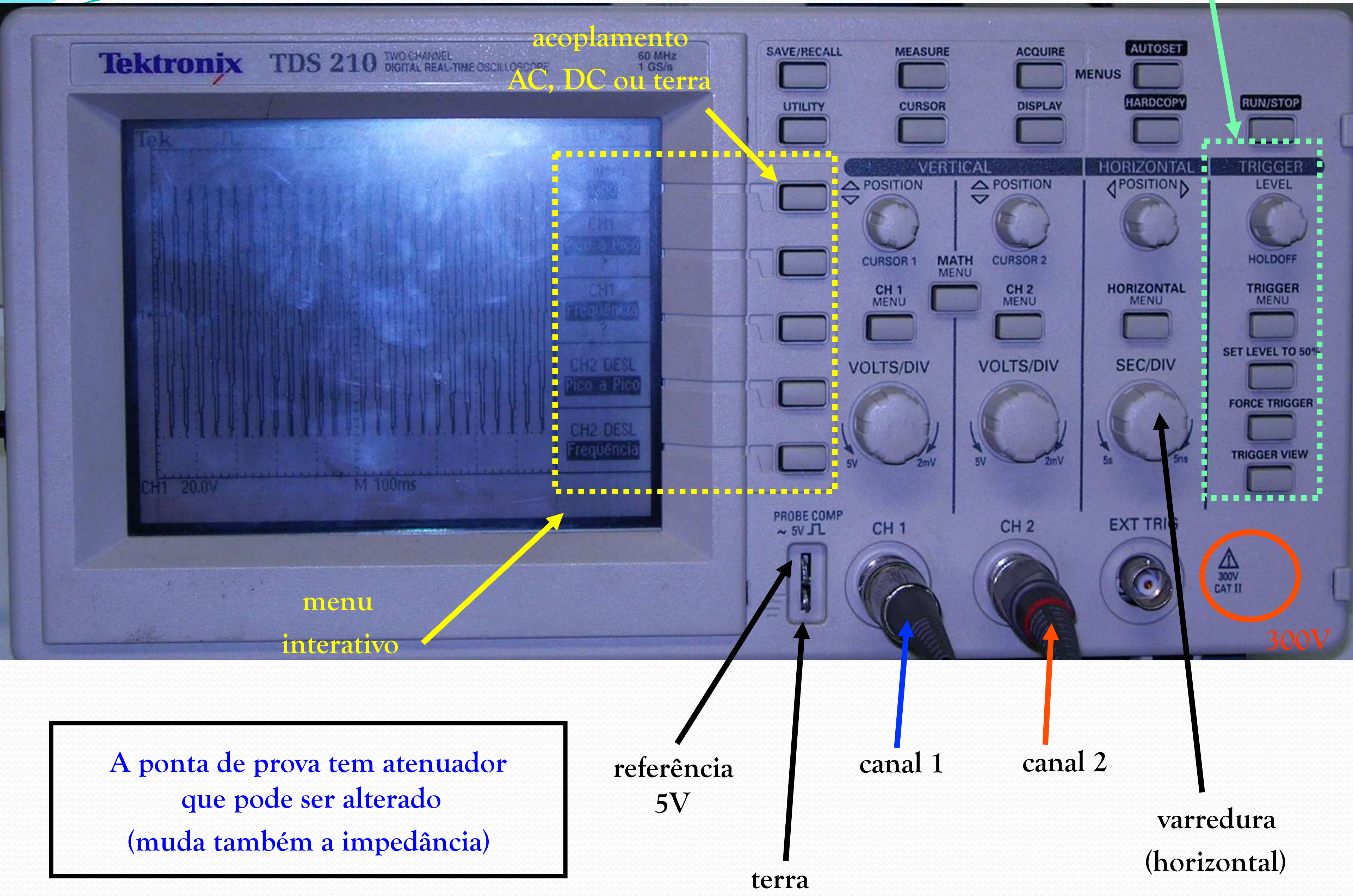
As medidas: circuitos

- Em ambos os casos o circuito consta de:
  - Gerador de áudio **com saída de baixa impedância**
  - Resistor de 47 Ω ou 470 Ω
  - Indutor de 250, 500 ou 1000 espiras
  - Capacitor de 0.47 μF ou 1μF
  - Placa de circuito
  - Osciloscópio

As medidas: Dicas

- Varie a frequência de 100 a 3kHz, ou próximo a isto.
  - O importante é ter voltagens mensuráveis nos dois canais.
  - Esta medida possibilita medir muitos pontos.
- As medidas de fase e amplitude podem ser feitas simultaneamente:
  - Organize uma tabela com:
    - frequência, Vc, Vr e $\Delta\phi$
- Facilite a sua vida linearizando quando possível.
- ATENÇÃO COM OS TERRAS:
  - O terra fica entre capacitor(indutor) e resistor:
    - Facilite sua vida ligue somente um terra no circuito.

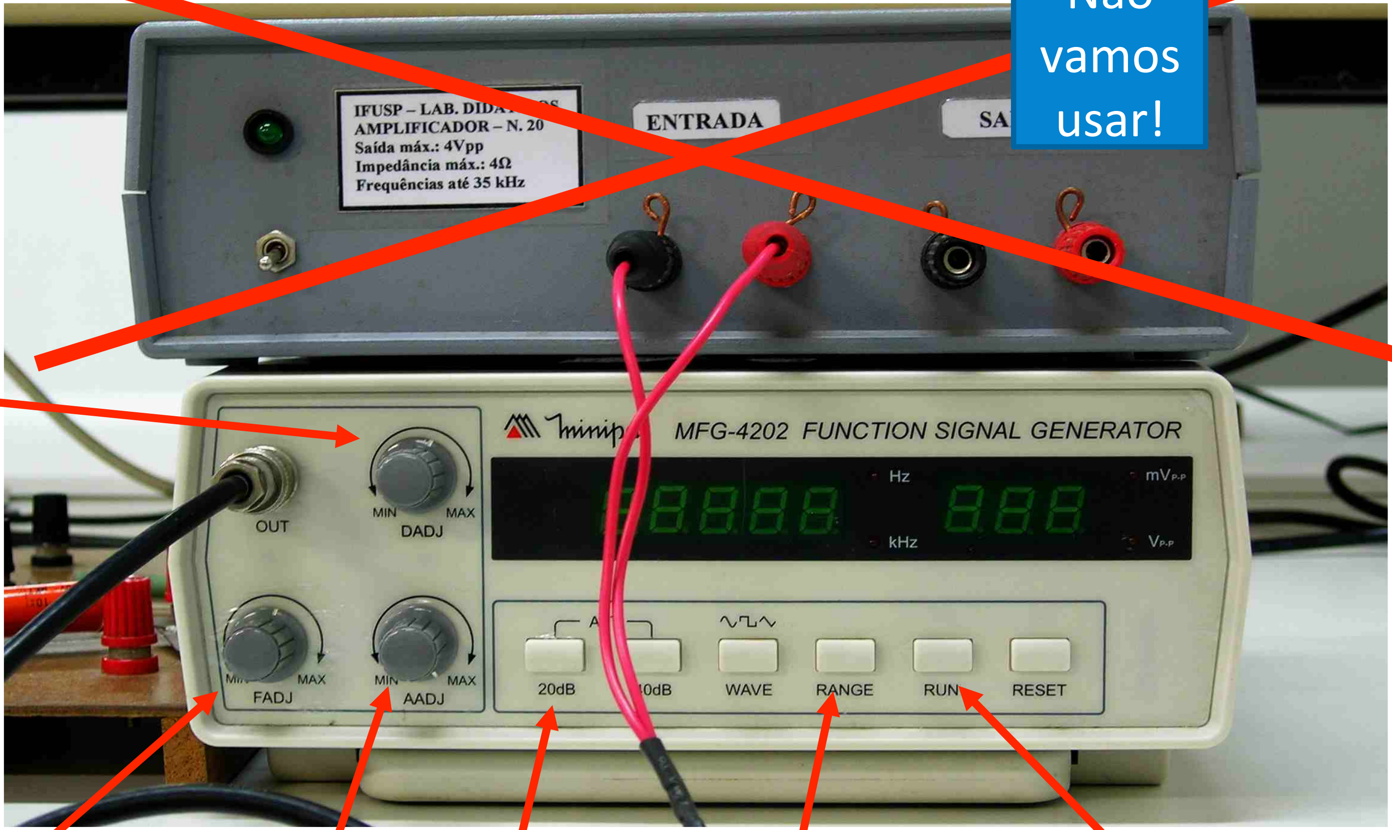
Osciloscópio



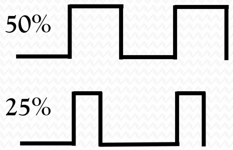
A ponta de prova tem atenuador
que pode ser alterado
(muda também a impedância)

Gerador de audio

Não vamos usar!



Duty cycle ADJust



Frequency ADJust

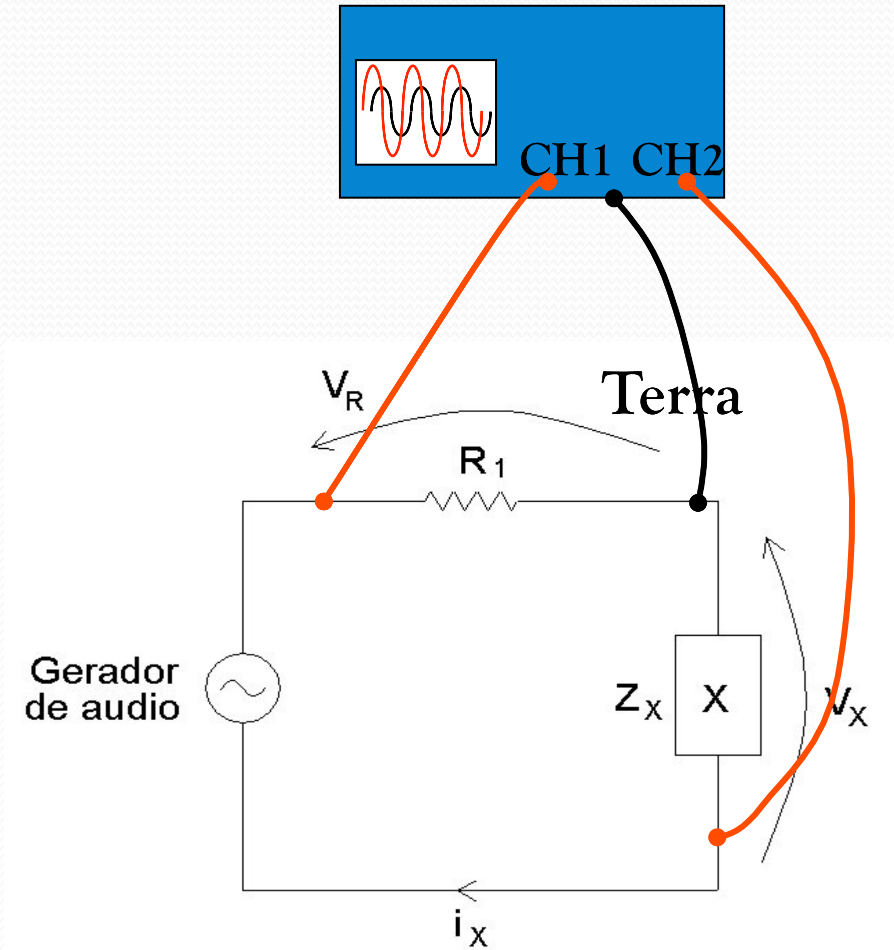
Amplitude ADJust

atenuador

intervalo de frequências

Executa parâmetro

Circuito



Instrumentos de medida:

- **Osciloscópio**
  - Canal 1: $-i_R = -V_R/R$ é a corrente no circuito
  - Canal 2: V_X
- Cuidado com ruídos
  - Estimar incertezas na tensão e corrente a partir do nível de ruído