

# Experiência 1

## Corrente Alternada

O objetivo destas primeiras experiências consiste em estudar o comportamento de alguns circuitos simples com resistor, capacitor e indutor em regime estacionário de corrente alternada.

Os conceitos básicos sobre o comportamento desse tipo de circuito em corrente alternada estão resumidos na seção **8** da **Apostila de Complementos de Física Experimental (1º parte)**, distribuída no semestre passado e nas seções **11, 12 e 13** da **Apostila de Complementos de Física Experimental (2º parte)** ambas de J. H. Vuolo, no capítulo **10** do livro "**Curso de Física Básica - Eletromagnetismo**" de H. M. Nussensveig e nas anotações de aula do curso **FAP - 212**.

Estas experiências deverão ser realizadas em **3** aulas e apresentadas num relatório que deverá ser entregue uma semana após o final da última experiência (ou terceira aula).

## Índice

Corrente Alternada (parte teórica)	página 3
Impedância Real e Complexa (parte teórica)	página 11
Potência Transferida a um Bipolo (parte teórica)	página 18
Resistor (parte teórica)	página 20
Capacitor (parte teórica)	página 22
Procedimento Proposto para o Capacitor	página 25
Indutor (parte teórica)	página 28
Procedimento Proposto para a Bobina	página 33
Filtro RC (parte teórica)	página 37
Procedimento Proposto para o Filtro RC	página 42
Circuito Integrador RC (parte teórica)	página 45
Análise de Fourier	página 48
Procedimento proposto para o circuito Integrador RC	página 50
Análise de Fourier Aplicada ao Filtro RC	página 53

# Corrente Alternada

Vamos apresentar um breve resumo dos conceitos mais importantes relativos ao funcionamento de circuitos em corrente alternada.

Uma tensão alternada é uma diferença de potencial que varia no tempo. Uma tensão alternada que tem um grande número de aplicações práticas é a que varia harmonicamente no tempo (do tipo senoidal), e pode ser descrita como:

$$V(t) = V_p \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1.1)$$

onde:  $V_p$  é a tensão máxima ou tensão de pico ou, ainda, amplitude,  $\omega$  é a frequência angular e  $\phi_0$  é a fase da tensão alternada no instante  $t=0$ . A frequência angular,  $\omega$ , é dada por:

$$\omega = 2\pi f \quad (1.2)$$

onde  $f$  é a frequência da oscilação e igual ao inverso do período,  $T$ .

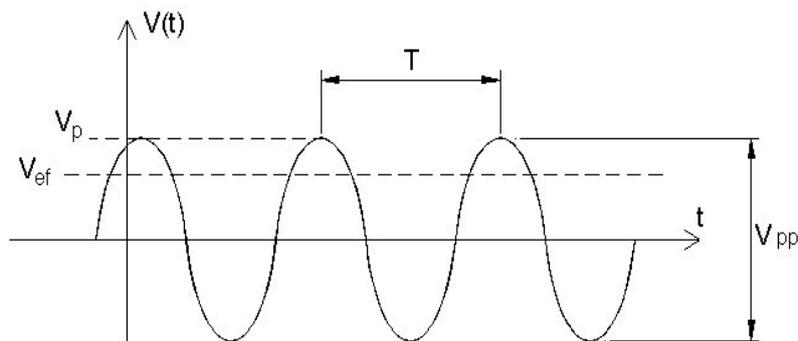
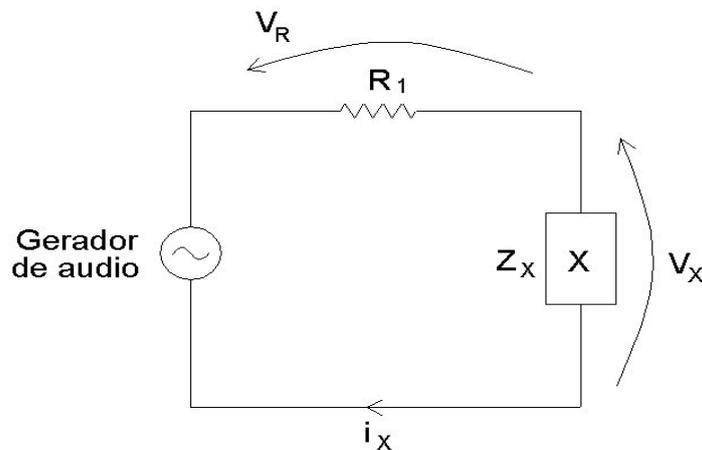


Figura 1.1: Tensão alternada senoidal em função do tempo.

A corrente alternada pode ser representada da mesma forma:

$$i(t) = i_p \cos(\omega t + \phi_1) \quad (1.3)$$

Vamos estudar o caso de um circuito de uma malha que consiste de um gerador de tensão alternada, uma resistência ôhmica,  $R_1$ , conhecida e um elemento qualquer de circuito, que vamos chamar de elemento  $X$ :



**Figura 1.2: Circuito para estudo do elemento X.**

Supondo que o elemento  $X$  seja um elemento resistivo ôhmico, a lei de Ohm, é válida :

$$V = Ri \quad \text{e} \quad (R = cte) \quad (1.4)$$

sendo  $V$  e  $i$  a tensão e a corrente aplicadas ao elemento estudado, respectivamente.

Portanto, no caso de tensão alternada, vamos ter a lei de Ohm escrita como:

$$V(t) = Ri(t) \quad \text{e} \quad (R = cte) \quad (1.5)$$

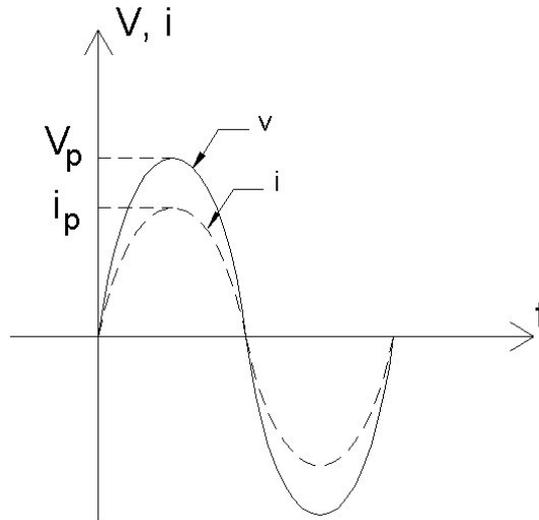
como (considerando, por uma questão de simplicidade, a fase inicial  $\phi_0$ , igual a zero):

$$V(t) = V_p \cos(\omega t) = Ri(t) \quad (1.6)$$

então, obrigatoriamente, temos que :

$$i(t) = i_p \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad R = \frac{V_p}{i_p} = cte \quad (1.7)$$

neste caso, então, as fases iniciais da tensão e da corrente são obrigatoriamente iguais para que a lei de Ohm (**equação 1.5**) seja válida. E a resistência, **R**, é a razão entre a tensão de pico, ou máxima, aplicada ao resistor e a corrente de pico, ou máxima, que atravessa o resistor ôhmico estudado.



**Figura 1.3: Tensão e corrente alternadas, em função do tempo, para o resistor.**

Vamos ver agora o que ocorre no caso do elemento **X** ser um capacitor, submetido a uma tensão cossenoidal, do tipo:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t) = \frac{q(t)}{C} \quad (1.8)$$

onde **q(t)** é a carga do capacitor e **C** é uma constante de proporcionalidade chamada de capacitância. A carga pode ser escrita como a integral da corrente que passa pelo elemento:

$$q(t) = \int i(t) dt = \int i_P \cos(\omega t) dt = \left( \frac{i_P}{\omega} \right) \text{sen}(\omega t) \quad (1.9)$$

A voltagem no capacitor, em função do tempo, que é a razão entre a carga e a capacitância, fica, portanto:

$$V(t) = \left( \frac{i_P}{\omega C} \right) \text{sen}(\omega t) \quad (1.10)$$

essa expressão não é uma igualdade porque a tensão aplicada é  $V(t) = V_p \cos(\omega t)$  (equação 1.8). Então, para que a expressão 1.10 se torne uma igualdade a corrente  $i(t)$  não pode ser simplesmente um cosseno com a fase do argumento igual a zero. Se  $i(t)$  for:

$$i(t) = i_p \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -i_p \text{sen}(\omega t) \quad (1.11)$$

vamos ter:

$$V(t) = V_p \cos(\omega t) = \frac{1}{C} \int -i_p \text{sen}(\omega t) dt = \left(\frac{i_p}{\omega C}\right) \cos(\omega t) \quad (1.12)$$

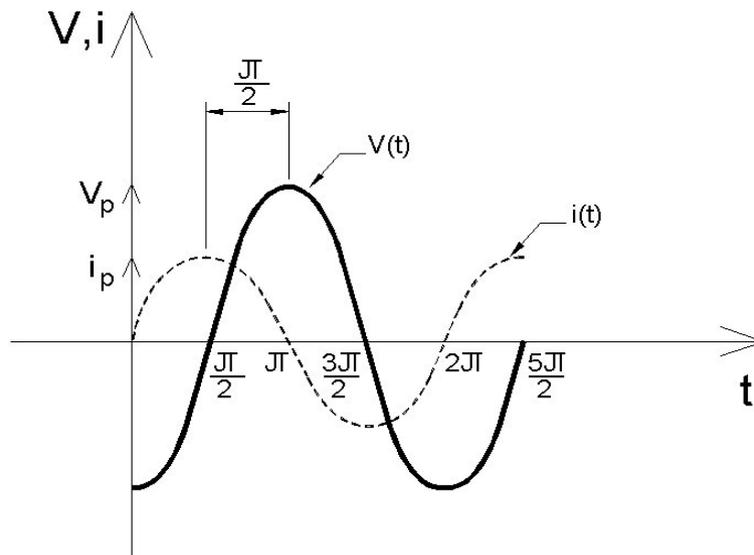
que é, de fato, uma igualdade se:

$$V_p = \frac{i_p}{\omega C} \quad (1.13)$$

A razão entre as amplitudes de pico, ou máximas, da tensão aplicada e da corrente que atravessa o capacitor é chamada de reatância capacitiva,  $X_c$ :

$$X_c = \frac{V_p}{i_p} = \frac{1}{\omega C} \quad (1.14)$$

Concluimos, então, que num capacitor submetido a uma tensão alternada, a corrente está adiantada de  $\pi/2$  em relação à tensão aplicada ao capacitor (**Atenção:** a defasagem de  $\pi/2$  é entre a corrente e a tensão diretamente sobre o capacitor e não quaisquer outras).



**Figura 1.4: Tensão e corrente alternadas em função do tempo, para o capacitor.**

No caso do elemento de circuito **X** ser um indutor submetido a uma tensão alternada cossenoidal, vamos ter:

$$V(t) = V_p \cos(\omega t) = L \frac{di}{dt} \quad (1.15)$$

Se a corrente for dada por:

$$i(t) = i_p \cos(\omega t) \quad (1.16)$$

e se quisermos obter a tensão sobre o indutor a partir da corrente que o atravessa e da sua indutância **L**, vamos derivar a corrente, segundo a **equação 1.15**:

$$V(t) = -Li_p \text{sen}(\omega t) \quad (1.17)$$

o que não é uma igualdade, porque  $V(t)$  é um cosseno. Portanto, também neste caso a fase inicial da corrente não pode ser igual à da tensão no indutor. Para que a **expressão 1.17** se torne uma igualdade a corrente tem que ser da forma:

$$i(t) = i_p \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_p \text{sen}(\omega t) \quad (1.18)$$

assim, quando derivarmos a corrente, vamos obter:

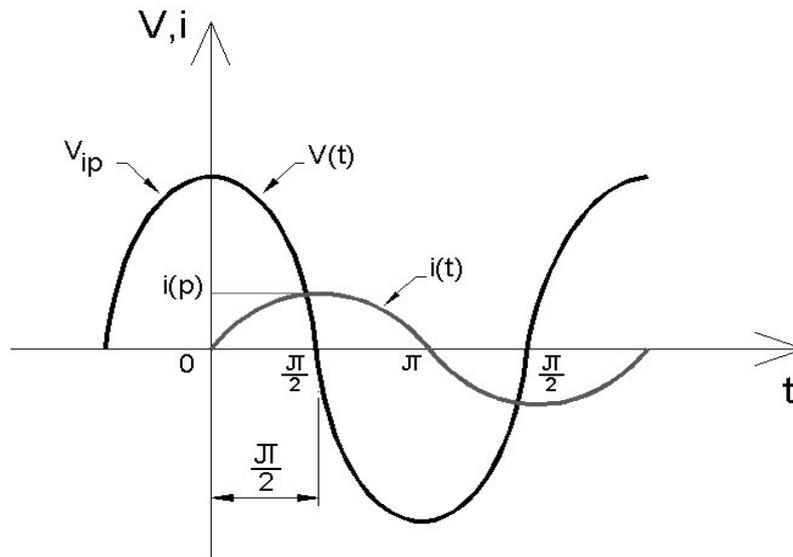
$$V(t) = L \frac{di}{dt} = i_p \omega L \cos(\omega t) \quad (1.19)$$

que, de fato, é uma igualdade, somente se:

$$V_p = \omega L i_p \quad (1.20)$$

A razão entre a tensão de pico, ou tensão máxima, aplicada ao indutor e a corrente de pico, ou corrente máxima, que o atravessa é chamada de reatância indutiva  $X_L = \omega L$ . Nota-se que nesse caso a corrente está atrasada de  $\pi/2$  em relação à tensão aplicada ao indutor. Como no caso do capacitor, a defasagem tem esse valor somente quando comparamos a corrente com a tensão aplicada ao indutor, sendo que a defasagem entre a corrente e quaisquer outras tensões existentes no circuito não tem necessariamente esse valor.

De fato, pode-se representar essa defasagem ou na corrente ou na tensão, contanto que ela seja do valor correto e com o sinal correto, veja a **figura 1.5** a seguir:



**Figura 1.5: Tensão e corrente alternada, em função do tempo, para o indutor.**

No caso de um resistor ôhmico não há defasagem entre tensão e corrente. Caso se tenha uma associação de dois resistores, por exemplo, em série, a tensão máxima ou de pico da associação é a soma das tensões máximas ou de pico de cada um:

$$V_{P(R_1+R_2)} = V_{P(R_1)} + V_{P(R_2)} \quad (1.21)$$

Esse resultado decorre da aplicação direta da lei de Ohm e das leis de Kirchhoff e torna fácil determinar, para qualquer associação de resistores, os parâmetros dessa associação.

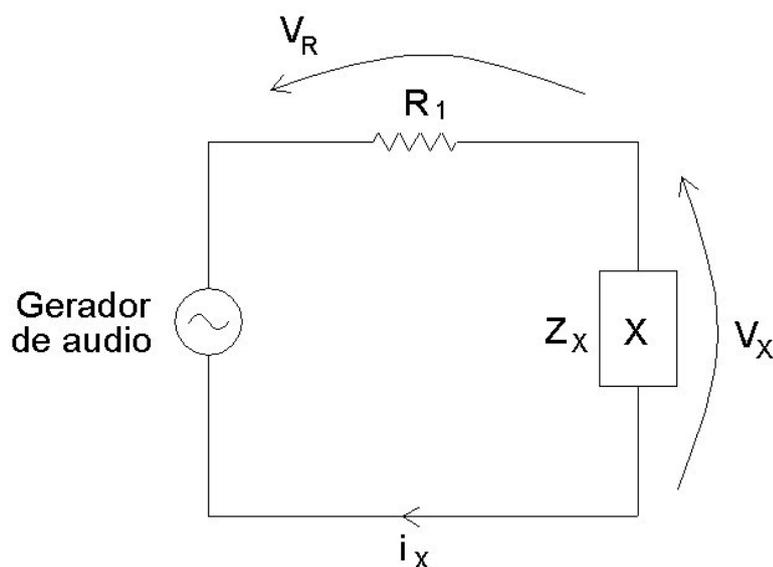
Entretanto, quando há defasagem entre tensão e corrente em determinados elementos, circuitos que contenham uma associação mista desses elementos ou deles com resistores, não vão poder ter os parâmetros determinados de maneira tão simples quanto para o caso de circuitos puramente resistivos. Por exemplo, no caso de um indutor (ou capacitor) em série com resistores, ou indutor e capacitor

em série, a tensão de pico da associação não é soma das tensões de pico de cada elemento, porque elas não estão em fase. Para achar a tensão de pico da associação, teríamos que somar as tensões de cada um, instante a instante. Isso torna extremamente trabalhoso determinar parâmetros de circuitos que não sejam puramente resistivos.

Porém, esse tratamento fica analiticamente muito mais simples quando se representam as oscilações de corrente e tensão por meio de quantidades complexas. Neste caso pode-se tratar circuitos indutivos e/ou capacitivos e resistivos como no caso de circuitos puramente resistivos. Para lembrar algumas propriedades das quantidades complexas veja a apostila **CFE (parte 2), seção 11.2**. Esse formalismo matemático usado em corrente alternada aplica-se igualmente bem a qualquer tipo de oscilação.

## Impedância Real e Complexa

Continuamos, então, o estudo do comportamento de um elemento passivo qualquer de circuito, em corrente alternada, através do circuito simples da **figura 1.2**, proposto na seção anterior, que possui em série um resistor, o elemento desconhecido **X** e um gerador de tensão alternada:



**Figura 1.2: Circuito para o estudo do elemento X.**

A caracterização completa do elemento **X**, em regime de corrente alternada estacionária, é obtida muito mais facilmente, quando se conhece a **impedância complexa,  $Z_x$** , desse elemento em função da frequência. Para definir essa grandeza precisamos introduzir a representação por complexos de tensões e correntes alternadas, que está disponível na **seção 11.3** da apostila **CFE** e nas referências aí indicadas.

Resumindo, uma tensão alternada  $\mathbf{V(t)}$ :

$$V(t) = V_p \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1.22)$$

pode ser representada pela parte real da quantidade complexa:

$$\hat{V}(t) = V_p e^{j(\omega t + \phi_0)} \quad j = \sqrt{-1} \quad (1.23)$$

e uma corrente alternada  $\mathbf{i(t)}$ :

$$i(t) = i_p \cos(\omega t + \phi_1) \quad (1.24)$$

pode ser escrita como a parte real de:

$$\hat{i}(t) = i_p e^{j(\omega t + \phi_1)} \quad (1.25)$$

A impedância complexa do elemento  $\mathbf{X}$  bipolar de circuito,  $\mathbf{Z_x}$ , é definida como a relação entre a tensão complexa e a corrente complexa que atravessa esse elemento:

$$\hat{Z}_x = \frac{\hat{V}(t)}{\hat{i}(t)} \quad (1.26)$$

Por simplicidade, como  $\phi_0$  pode ser qualquer, a fase inicial da corrente pode ser colocada igual à zero, e, como qualquer número complexo pode ser expresso pela fórmula de Euler:

$$\hat{Z}_x = \frac{V_p e^{j(\omega t + \phi_0)}}{i_p e^{j\omega t}} = Z_0 e^{j(\phi_m)} \quad (1.27)$$

então, para que a igualdade acima seja verdadeira, temos que ter obrigatoriamente:

$$Z_0 = \frac{V_P}{i_P} \quad \text{e} \quad \phi_0 = \phi_m \quad (1.28)$$

onde  $Z_0$  é a impedância real do elemento  $X$  e  $\phi_0$  é a diferença de fase entre tensão e corrente nesse elemento,  $X$ , de circuito, sendo que  $V_P$  e  $i_P$  são os valores máximos ou valores de pico da tensão e da corrente, respectivamente, nesse elemento.

Resumindo, se num bipolo com impedância complexa  $Z_X = Z_0 e^{j\phi_0}$ , a corrente for  $i(t) = i_P \cos \omega t$ , a tensão nos terminais desse bipolo será:

$$V(t) = V_P \cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{sendo} \quad V_P = Z_0 i_P \quad (1.29)$$

ou seja, se a corrente é alternada, a tensão também é, mas com uma fase inicial diferindo da fase da corrente de um valor  $\phi_0$ , e, com amplitude de pico, ou máxima, igual a  $Z_0 i_P$  (lembrando que  $i_P$  é a amplitude máxima, ou de pico da corrente).

Como  $Z_X$  é um número complexo, pode-se escrevê-lo na forma:

$$\hat{Z}_X = Z_0 e^{j\phi_0} = R + jX = Z_0 \cos \phi_0 + jZ_0 \text{sen} \phi_0 \quad (1.30)$$

onde  $R$  é a parte real da impedância ou parte resistiva:

$$R = Z_0 \cos \phi_0 \quad (1.31)$$

No circuito estudado (**figura 1.1**) quando o elemento  $X$  for um resistor ôhmico, teremos  $\phi_0 = 0$  e a impedância é a resistência  $R_X$ . E  $X$  é a reatância que é a parte imaginária da impedância:

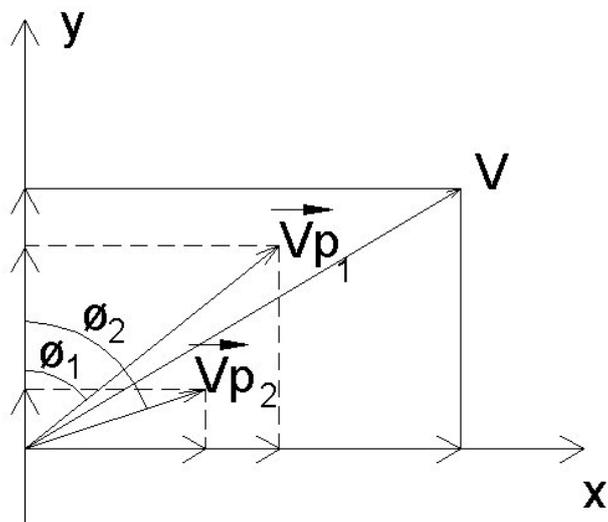
$$X = Z_0 \text{sen} \phi_0 \quad (1.32)$$

Como já mencionado anteriormente, a grande vantagem da notação complexa é que a impedância complexa equivalente de um circuito qualquer pode ser obtida pelas mesmas regras simples das associações de resistores. A demonstração dessas fórmulas é baseada na definição de impedância complexa e nas leis de Kirchhoff e é análoga às demonstrações das associações de resistores.

Existe um artifício que simplifica muito a soma de tensões (ou correntes) alternadas arbitrárias, e, que, portanto, também simplifica as demonstrações acima, assim como as soluções de circuito de corrente alternada em geral. Ele se baseia no fato que, a soma de duas tensões alternadas arbitrárias como exemplificado na fórmula abaixo:

$$V(t) = V_{p1} \cos(\omega t + \phi_1) + V_{p2} \cos(\omega t + \phi_2) \quad (1.33)$$

equivale a somar as componentes, no plano **xy**, de dois vetores de módulos **V<sub>p1</sub>** e **V<sub>p2</sub>**, girando com velocidade angular **ω** e com ângulos iniciais, em relação ao eixo **y**, **φ<sub>1</sub>** e **φ<sub>2</sub>**, respectivamente. Pode-se realizar a soma vetorial no instante **t=0**, porque a partir desse instante o “vetor soma”, que é equivalente à tensão de pico da soma, **V<sub>0</sub>**, também gira com a mesma velocidade angular. Esses vetores girantes são chamados de fasores. A figura a seguir é um exemplo de como esses vetores funcionam para encontrar a tensão soma da **equação 1.33**:



**Figura 1.6: Diagrama de fasores para soma de tensões alternadas (equação 1.33).**

Por esse diagrama fica evidente que, devido à defasagem, a amplitude da tensão soma,  $V_0$ , não é igual à soma dos módulos das amplitudes das componentes,  $|V_{p1}|$  e  $|V_{p2}|$  e sim:

$$V_0^2 = V_{P1x}^2 + V_{P1y}^2 + V_{P2x}^2 + V_{P2y}^2 \quad (1.34)$$

O método também funciona para circuitos em série com elementos resistivos e não resistivos, porque como a corrente é a mesma para todos os elementos, as tensões de pico em cada elemento são diretamente proporcionais às impedâncias reais desses elementos e as defasagens das tensões também são iguais às das impedâncias complexas (veja as **fórmulas 1.28**). Então, a resistência,  $R$ , e as reatâncias indutivas e/ou capacitivas podem ser representadas por fasores como mostrado na **figura 1.7** a seguir:



A tensão soma pode ser encontrada pelo diagrama de fasores representado na **figura 1.8**, a seguir:

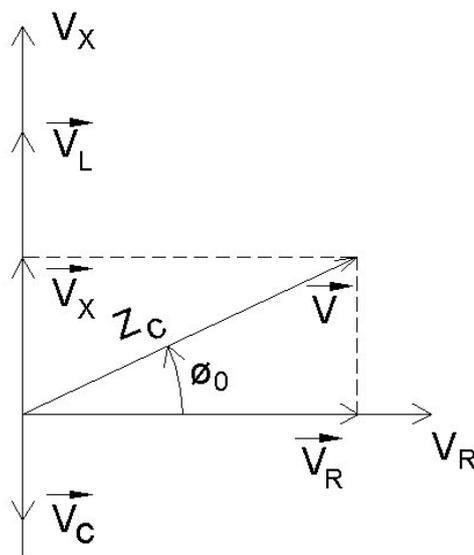


Figura 1.8: Diagrama de fasores para um circuito RLC série.

**Observação Importante 1** : ao fazer medidas, descrever o instrumento de medida utilizado e seu erro de leitura (embora não necessariamente esse vá ser o erro da medida). Quando for possível optar entre dois ou mais instrumentos para a mesma medida, justificar a escolha com argumentos baseados na precisão e confiabilidade dos instrumentos. Não esquecer de anotar os erros experimentais associados e ao fazer os cálculos não deixar de levá-los em consideração, assim como quaisquer outros erros que porventura ocorrerem. Em todas as comparações com valores nominais calcular os desvios relativos percentuais.

## Potência Transferida a um Bipolo

A potência transferida de um circuito qualquer a uma impedância, também qualquer, a cada instante, é dada por:

$$P(t) = V(t) \bullet i(t) \quad (1.36)$$

Como  $V(t)$  e  $i(t)$  são respectivamente:

$$V(t) = V_p \cos(\omega t + \phi_0) \quad e \quad i(t) = i_p \cos(\omega t) \quad (1.37)$$

pode-se escrever a **equação 1.36** como:

$$P(t) = V_p i_p \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1.38)$$

Desenvolvendo esses dois cossenos como:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (1.39)$$

$$\cos(\omega t + \phi_0) = \frac{e^{j(\omega t + \phi_0)} + e^{-j(\omega t + \phi_0)}}{2}$$

substituindo na **equação 1.38** e reagrupando os termos, obtém-se:

$$P(t) = \left( \frac{V_P i_P}{2} \right) \left( e^{j(2\omega t + \phi_0)} + e^{-j(2\omega t + \phi_0)} + e^{j\phi_0} + e^{-j\phi_0} \right) \quad (1.40)$$

que é igual a:

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) + \frac{V_P i_P}{2} \cos \phi_0 \quad (1.41)$$

Esse é o valor instantâneo da potência, para encontrar o valor médio num período  $T$ , pela definição de valor médio em tempo, integra-se  $P(t)$  num período completo e divide-se por esse período:

$$P(t) = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos \phi_0 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) dt \quad (1.42)$$

a segunda integral é nula, mas a primeira não. Portanto a potência média num período é:

$$P(t) = \frac{1}{2} V_P i_P \cos \phi_0 \quad (1.43)$$

Chama-se de valor eficaz da tensão,  $V_{ef}$ , o valor  $V_P/\sqrt{2}$  e valor eficaz da corrente,  $i_{ef}$ , o valor  $i_P/\sqrt{2}$ . Utilizando esses valores a potência média fica:

$$P(t) = V_{ef} i_{ef} \cos \phi_0 \quad (1.44)$$

O fator  $\cos \phi_0$  é chamado de fator de potência da impedância e suas implicações para o funcionamento dos elementos de circuito estudados nestes experimentos serão discutidas a seguir.

Para a medida de tensões e correntes alternadas utilizando voltímetros ou amperímetros analógicos ou digitais os valores obtidos são os valores eficazes tanto da tensão quanto da corrente. Uma discussão mais detalhada do funcionamento desses aparelhos em tensão e corrente alternada é apresentada na **seção 7.4** da apostila de **CFE (parte 1)**.

## Resistor

Como já foi visto, no caso do resistor ôhmico a defasagem entre tensão e corrente no resistor é nula e a impedância é real:

$$Z_0 = R = \frac{V_P}{i_P} \quad (1.45)$$

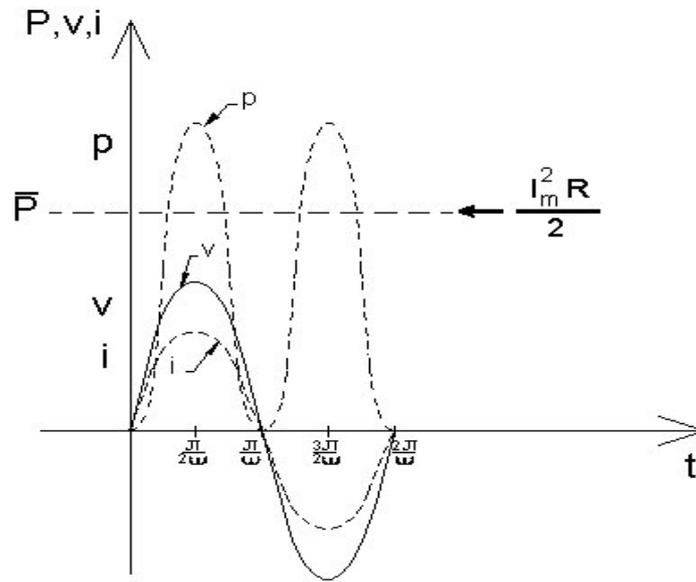
Em geral, resistores comuns têm comportamento ôhmico até um determinado valor de potência que é fornecido pelo fabricante. Para garantir o comportamento ôhmico e não chegar a danificar o componente esses valores devem ser respeitados. Além disso, deve-se ter sempre em mente, que componentes reais não se comportam exatamente de acordo com as definições, o que nesse caso quer dizer que resistores reais podem não ter um comportamento resistivo puro mas, dependendo das condições e características de construção do resistor, apresentar capacitâncias e/ou indutâncias parasitas. Esse tipo de comportamento está discutido com mais detalhes na apostila **CFE (parte 2) seção 12.4**.

A potência média dissipada num resistor sob corrente alternada será:

$$P(t) = V_{ef} i_{ef} \quad (1.46)$$

porque a defasagem entre tensão e corrente, num resistor, é igual a zero, e, portanto o fator de potência,  $\cos\phi_0$ , é igual a **1**.

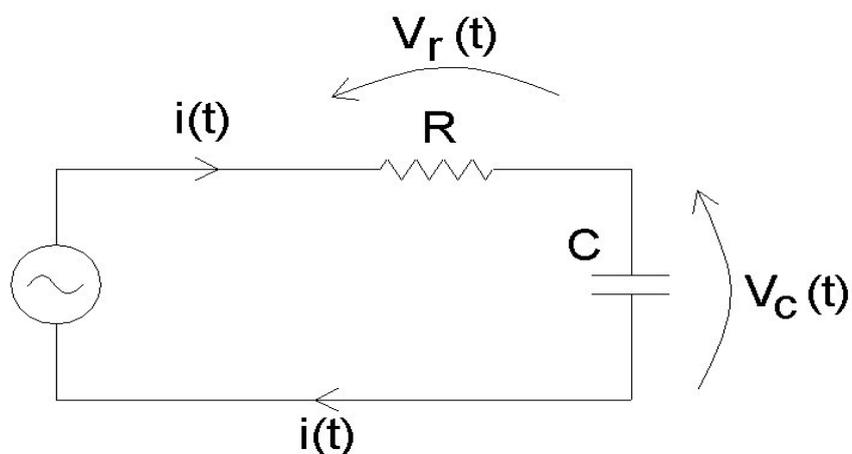
Vamos reproduzir a **figura 1.3** para a tensão e corrente alternadas num resistor e incluir nesse gráfico o comportamento da potência instantânea e da potência média para esse elemento. É a **figura 1.9** que, por uma questão de facilitar a visualização está na próxima página.



**Figura 1.9: Comportamento da potência instantânea e da potência média dissipada num resistor.**

## Capacitor

Colocando agora um capacitor ideal no lugar do elemento **X** do circuito da **figura 1.1**:



**Figura 1.10: Circuito para o estudo do comportamento do capacitor.**

A tensão medida sobre o capacitor será:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1.47)$$

Como vamos utilizar o tratamento complexo, podemos escrever a corrente que passa no circuito como sendo a parte real de:

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j\omega t} \quad (1.48)$$

A tensão sobre o capacitor será, também, a parte real de:

$$\hat{V}(t) = \frac{1}{C} \int \hat{i}(t) dt = \frac{1}{j\omega C} i_P e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega C} \hat{i}(t) \quad (1.49)$$

mas  $1/j$  pode ser escrito como:

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j \times j} = -j = -\left(\cos \frac{\pi}{2} + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (1.50)$$

ou seja,  $\mathbf{V}_C(\mathbf{t})$ , fica:

$$V_C(t) = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} i(t) \quad (1.51)$$

Como a relação entre  $\mathbf{V}_C(\mathbf{t})$  e  $\mathbf{i}(t)$  é a impedância complexa  $\mathbf{Z}_C$ , (o índice  $\mathbf{C}$  denota o capacitor):

$$\hat{V}_C(t) = \hat{Z}_C \hat{i}(t) \quad \text{e} \quad \hat{Z}_C = Z_0 e^{-j\frac{\pi}{2}} = \hat{X}_C \quad (1.52)$$

assim sendo a impedância real de um capacitor ou sua reatância capacitiva real  $\mathbf{X}_C$  é:

$$Z_0 = X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (1.53)$$

e a defasagem entre a tensão no capacitor e a corrente que o atravessa é :

$$\phi_0 = -\frac{\pi}{2} \quad (1.54)$$

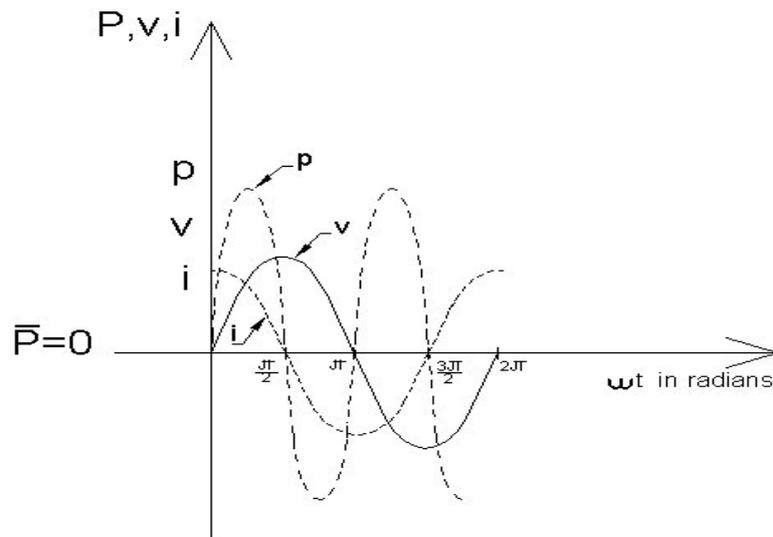
o que significa que a tensão está atrasada de  $\pi/2$  em relação à corrente, que é o que se vê na **figura 1.4**.

Da mesma maneira que o resistor, um capacitor real pode ter desvios em relação ao comportamento ideal. Esse comportamento está bem discutido na apostila de **CFE (parte 2) seção 12.2**. A proposta é, portanto, verificar se o capacitor que está disponível pode ser considerado um capacitor ideal dentro dos intervalos de frequência e tensão fornecidos pelo gerador de áudio frequência, e, que sejam tolerados pelos instrumentos de medida.

Em relação à potência, para o caso de um capacitor ideal submetido à corrente alternada, a potência instantânea é:

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2} \cos \phi_0 + \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) \quad (1.55)$$

Mas, como a integral do segundo termo dessa equação, sobre um período é igual a zero (como já foi visto) e  $\phi_0$  é igual a  $\pi/2$  para um capacitor ideal, conclui-se que a **potência média dissipada por um capacitor ideal é nula**. O gráfico a seguir mostra a tensão, a corrente e a potência instantânea sobre um capacitor ideal:



**Figura 1.11: Comportamento da potência instantânea e da potência média para o caso de um capacitor ideal.**

**Observação Importante 2:** não esquecer que as duas pontas de prova do osciloscópio têm terra comum, por isso não se deve ligar os dois terminais de terra das pontas de prova num circuito simples. Se a ligação for feita num mesmo ponto, ela é supérflua e, em pontos diferentes resulta num curto circuito. As tensões medidas com as pontas de prova são sempre as tensões existentes entre a ponta de prova e o ponto de terra, prestar atenção, então, na ligação do terra em relação às duas pontas.

## Procedimento Proposto para o Capacitor

Para as medidas a seguir vai ser necessário um osciloscópio (ou um multímetro se achar que é conveniente, embora seja possível medir tudo usando os dois canais do osciloscópio). Então, antes de começar a medir, verifique se o seu instrumento está calibrado e certifique-se da faixa de frequência em que ele opera (faixa para a qual a sua leitura é confiável), que consta do manual do instrumento.

Utilizando um osciloscópio, verificar se as leituras de frequência indicadas pelo gerador de áudio estão corretas. Basta considerar as leituras inicial e final de cada faixa do gerador. Anotar os resultados e baseando-se neles decidir se as leituras serão feitas no gerador ou no osciloscópio e justificar sua escolha.

Aferir a resistência,  $R$ , do circuito com um ohmímetro, verificando se está de acordo com o valor nominal.

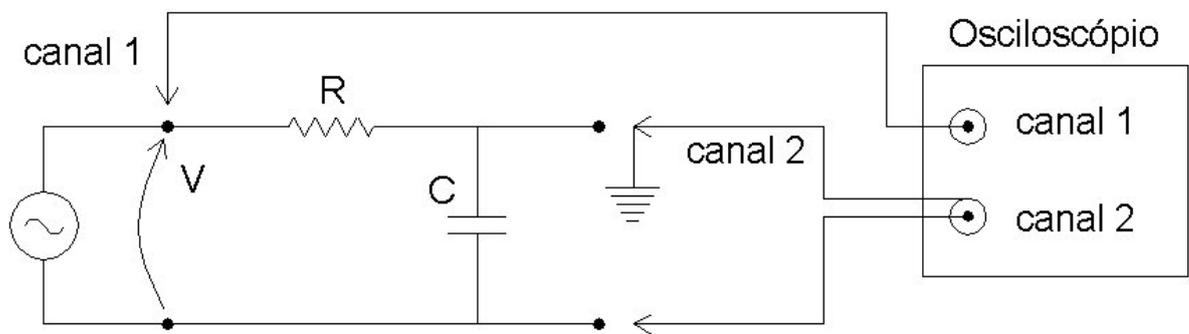
**Observação Importante 3:** deve ser lembrado que qualquer medida feita com o ohmímetro só pode ser feita com o componente totalmente desligado do circuito. Em particular, no caso de um capacitor deve-se ter o cuidado de descarregá-lo antes da medição.

Estabelecer o limite para a resistência ôhmica (em corrente contínua) do capacitor fornecido e anotar o valor nominal de sua capacitância. Porque é necessário estabelecer esse limite para a resistência ôhmica do capacitor?

A seguir, utilizando o aplicativo **Eletronic Workbench** (disponível no seu micro sob a sigla **EWB**) fazer a simulação do circuito da **figura 1.10**, colocando os valores dos parâmetros de circuito ( $R$ ,  $C$ ,  $V(t)$ , resistência interna do gerador,  $R_G$ ) iguais ao que vai utilizar no laboratório. Variando a frequência da tensão fornecida pelo gerador, anote a tensão e corrente sobre o capacitor. Dessa maneira, é possível fazer uma previsão do comportamento do

capacitor ideal e comparar esse comportamento com o do capacitor real do laboratório para testar se o modelo de capacitor ideal é adequado.

Montar o circuito da **figura 1.10**, em que o elemento **X** é o capacitor fornecido e ligando o osciloscópio como indicado na **figura 1.12**:



**Figura 1.12: Montagem experimental para o estudo do comportamento do capacitor.**

Medir a tensão de pico sobre o capacitor,  $V_{PC}$  e a tensão de pico sobre o resistor,  $V_{PR}$  em função da frequência. Abranger, se possível, toda a faixa de frequência permitida pelo seu instrumento de medida. Anotar também a defasagem entre tensão e corrente, no capacitor, para cada frequência. Por isso é mais prático utilizar o osciloscópio para todas as medidas. Em todo caso, se preferir usar um multímetro para a medida da tensão e da corrente, é importante anotar se está fazendo medidas com multímetro ou com osciloscópio e onde está medindo a frequência. Lembre-se que multímetros fornecem valores eficazes e osciloscópios fornecem valores de pico das tensões. De quinze a vinte medidas, cobrindo todo o intervalo desejado, são suficientes.

A partir dos valores medidos de tensão e corrente, (de pico ou eficazes), calcular a impedância ou reatância do capacitor e a frequência angular em cada caso. Colocar numa tabela.

Fazer o gráfico que achar conveniente para verificar se o seu capacitor está se comportando como um capacitor ideal e para determinar o valor experimental da capacitância. Compare esse valor com o valor nominal.

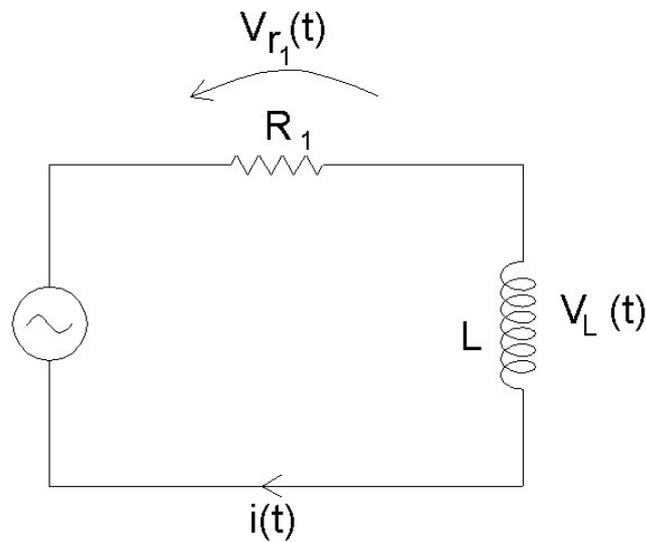
Analisar as medidas de defasagem, entre a tensão e a corrente no capacitor, em função da frequência e comparar com o valor esperado.

Que conclusões pode tirar dessas medidas? Justifique sua resposta.

**Observação Importante 4:** Todas as medidas realizadas devem ter associados níveis de confiabilidade e precisão, e, deve ser feita uma análise crítica das condições de realização da experiência e qual a influência que tais condições possam ter sobre as medidas. Todas as conclusões que tirar de qualquer experiência que fizer, devem ser justificadas através de argumentos físicos levando em conta os erros experimentais associados e desvios relativos quando possível. Caso seja necessária uma revisão dos conceitos de teoria de erros, uma boa referência é o livro “**Fundamentos de Teoria de Erros**” de J. H. Vuolo, além da apostila de **CFE, parte 1, capítulo 5**.

## Indutor

Considerando que se coloque um indutor ideal no lugar do elemento **X**, no circuito da **figura 1.2**:



**Figura 1.13: Circuito para o estudo do comportamento de um indutor.**

A tensão no indutor,  $V_L(t)$ , será dada por:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.56)$$

Adotando a notação complexa:

$$\hat{V}_L(t) = L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} \quad (1.57)$$

e considerando que a representação complexa da corrente no circuito seja:

$$\hat{i}(t) = i_P e^{j\omega t} \quad (1.58)$$

a tensão no indutor será a parte real de:

$$\hat{V}_L(t) = j\omega L i_p e^{j\omega t} = j\omega L \hat{i}(t) \quad (1.59)$$

pode-se escrever **j** como:

$$j = \cos \frac{\pi}{2} + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (1.60)$$

Portanto, a tensão complexa no indutor ideal tem a forma:

$$\hat{V}_L(t) = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \hat{i}(t) \quad (1.61)$$

Como sabemos que a impedância complexa é a razão entre a tensão complexa e a corrente complexa no indutor ideal em estudo, concluímos que:

$$\hat{V}_L(t) = \hat{Z}_L \hat{i}(t) \quad \text{e} \quad \hat{Z}_L = \hat{X}_L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (1.62)$$

portanto, a impedância real ou reatância, **X<sub>L</sub>**, desse indutor é :

$$Z_{0L} = X_L = \omega L \quad (1.63)$$

a diferença de fase da tensão no indutor em relação à corrente, no mesmo, é:

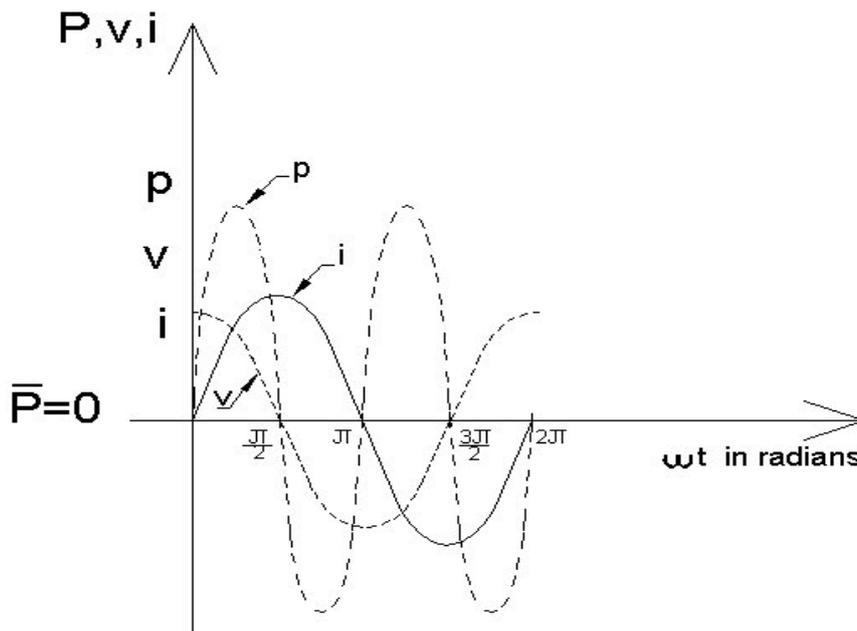
$$\phi_0 = +\frac{\pi}{2} \quad (1.64)$$

portanto, a tensão, no indutor, **V<sub>L</sub>(t)**, está adiantada de **π/2** em relação à corrente. Isso pode ser visto na **figura 1.5**.

Quanto à potência instantânea dissipada no indutor ideal, como já calculado é igual a:

$$P(t) = \frac{V_P i_P}{2} \cos \phi_0 + \frac{V_P i_P}{2} \cos(2\omega t + \phi_0) \quad (1.65)$$

e, como é o caso do capacitor também, a **potência média dissipada num indutor ideal é nula**, porque a integral do segundo termo da equação acima é nula num período e  **$\cos \phi_0$**  é igual a zero, porque  $\phi_0$  para um indutor ideal é igual a  $\pi/2$ . Isso pode ser observado na **figura 1.14** a seguir.



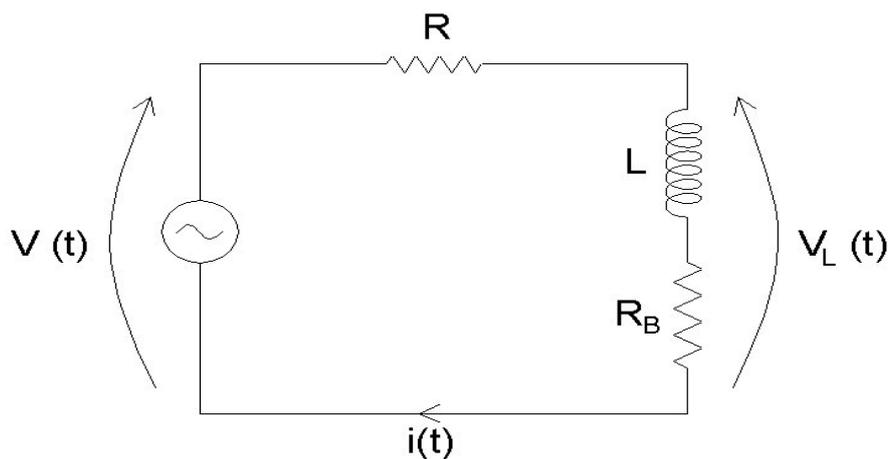
**Figura 1.14: Tensão, corrente e potência dissipada num indutor ideal.**

Porém, raramente, o modelo de um indutor ideal pode ser usado para bobinas, pois como elas são fios condutores muito longos enrolados, sua resistência elétrica é, em geral, significativa e não

pode ser desprezada. Na **seção 12.3** da apostila de **CFE** é feita uma discussão de como essa característica e alguns outros efeitos podem inviabilizar a adoção do modelo de indutor ideal para uma bobina comum.

Para as condições do laboratório, quer dizer, para a bobina, circuito e intervalo de frequência disponível, não é possível adotar o modelo de indutor ideal. Pelo menos a resistência da bobina deve ser levada em conta. Isso significa que o modelo adotado para a bobina, não é mais o de uma indutância pura, mas de uma indutância pura ligada, em série, a uma resistência ôhmica.

Portanto, o circuito experimental não é o da **figura 1.13**, mas o da **figura 1.15**, a seguir:



**Figura 1.15: Circuito para o estudo do comportamento de uma bobina.**

Para um circuito, em série, de uma resistência e de uma indutância pura, a impedância complexa equivalente é a soma das impedâncias complexas de cada elemento. A impedância da resistência da bobina é  $R_B$  e a impedância complexa do indutor puro é  $X_L$ :

$$X_L = j\omega L \quad (1.66)$$

Portanto a impedância complexa da associação é:

$$\hat{Z} = R_B + j\omega L = Z_0 e^{j\phi_0} \quad (1.67)$$

A impedância real é o módulo de **Z** :

$$Z = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{R_B^2 + \omega^2 L^2} \quad (1.68)$$

e a defasagem entre a tensão da associação em série **R<sub>B</sub>** mais **L** e a corrente que a percorre, pode ser escrita a partir da **equação 1.66** como sendo:

$$\operatorname{tg} \phi_0 = \frac{\omega L}{R_B} \quad (1.69)$$

ou:

$$\phi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R_B} \quad (1.70)$$

Nota-se que a essa defasagem não é mais  $\pi/2$ , mas um outro ângulo que depende da frequência  $\omega$ , da indutância **L** e da resistência do indutor **R<sub>B</sub>**.

Do ponto de vista da potência dissipada pela bobina é fácil demonstrar que a expressão para a potência instantânea é:

$$P(t) = V_B(t)i_B(t) \quad (1.71)$$

$$P(t) = V_{LP}i_{LP} \cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi) \quad (1.72)$$

e a potência média é, pela definição de valor médio, a potência instantânea integrada num período e dividida pelo período. Refazendo o mesmo cálculo já feito anteriormente obtém-se:

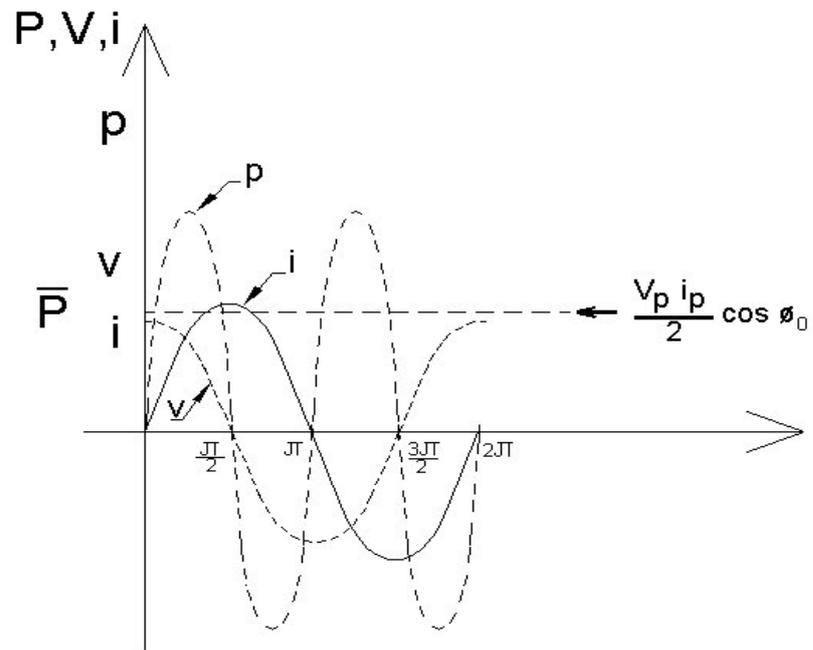
$$P(t) = V_{Lef} i_{Lef} \cos \phi \quad (1.73)$$

só que agora  $\phi$  não é igual a  $\pi/2$ , porque o indutor não é puro. De acordo com o cálculo já feito para esse caso,  $\phi$  é:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R_B} \quad (1.74)$$

portanto a **potência média não é nula** como no caso do indutor puro.

A **figura 1.16** a seguir mostra o comportamento da tensão, da corrente e da potência instantânea e média para o caso de uma bobina:

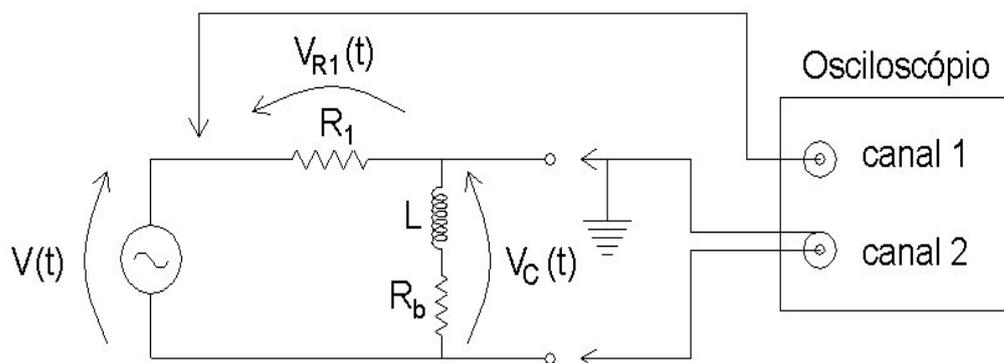


**Figura 1.16: Comportamento da potência instantânea e da potência média para uma bobina.**

## Procedimento Proposto para a Bobina

Tendo em mente que o indutor que vai ser estudado não pode ser considerado ideal, a primeira coisa a ser feita é anotar os valores nominais da indutância  $L$  e da resistência da bobina,  $R_B$ . Anotar também o valor nominal do resistor ôhmico fornecido. Verificar os valores máximos de potência que esses elementos suportam e fazer o cálculo necessário para saber qual a tensão máxima, ou de pico, que pode ser aplicada para que nenhum componente do circuito seja danificado. Verificar, com um ohmímetro, os valores das resistências da bobina e do resistor e anotar esses valores para comparação posterior.

Com o aplicativo **EWB**, simular o circuito da **figura 1.15** para o estudo da bobina. Colocar os parâmetros do circuito iguais aos que vão ser utilizados no laboratório. Variar a frequência da tensão fornecida pelo gerador e verificar o comportamento da bobina, anotando a tensão e corrente sobre a mesma para comparar com os valores medidos experimentalmente, e, testar a aplicabilidade do modelo escolhido. A seguir montar o circuito da **figura 1.17**, com o equipamento que foi colocado à disposição:



**Figura 1.17: Circuito para o estudo do comportamento de uma bobina.**

Os objetivos são verificar se a bobina fornecida, submetida a uma tensão alternada, pode ser modelada por uma indutância pura mais uma resistência ôhmica, e, em caso afirmativo, se os valores para esses dois parâmetros, além da defasagem entre tensão e corrente na bobina, estão de acordo com os valores nominais e/ou esperados. Se esse modelo para a bobina não for adequado, então um novo modelo deverá ser proposto e testado.

Para tanto será preciso medir a corrente que passa na bobina (o que é fácil, já que o circuito é série e existe um resistor conhecido) e a tensão aplicada sobre ela, em função da frequência. Medir também a defasagem entre a tensão na bobina e a corrente na bobina em função da frequência. Essas medidas podem ser simultâneas. Cerca de quinze medidas abrangendo todo o intervalo de frequência aceito pelo seu instrumento de medida devem ser suficientes. Essas medidas podem ser feitas utilizando os dois canais do osciloscópio, que deve já estar aferido, se a experiência com o capacitor tiver sido feita antes.

Se essas experiências forem realizadas em dias diferentes ou com aparelhos diferentes, então, os procedimentos de verificar a calibração do osciloscópio, e a confiabilidade das escalas de frequência do gerador de áudio, deverão ser refeitos, como descrito no item sobre o procedimento experimental do circuito com capacitor. Também o voltímetro poderá ser utilizado (desde que esteja calibrado) nesta fase da experiência, mas somente para a medida das tensões e não das defasagens. Não esquecer de informar que instrumento está utilizando para qual medida, pois isso pode definir o erro experimental associado. Justifique suas escolhas.

A partir dos valores de pico de tensão e corrente no indutor calcular o valor experimental da impedância real da bobina em função da frequência angular. Colocar numa tabela.

Fazer o gráfico que achar mais conveniente para verificar se a sua bobina está de acordo com o modelo proposto de indutância pura mais resistência ôhmica. Desse gráfico, obter os valores médios da

indutância,  $L$ , e da resistência,  $R_B$ , da bobina e comparar com os valores nominais.

Fazer um outro gráfico, da defasagem em função da frequência angular, como mais um teste do seu modelo. O que pode concluir desse gráfico?

**Em todos os gráficos as curvas teóricas e as simuladas devem ser superpostas às curvas experimentais para facilitar a comparação.**

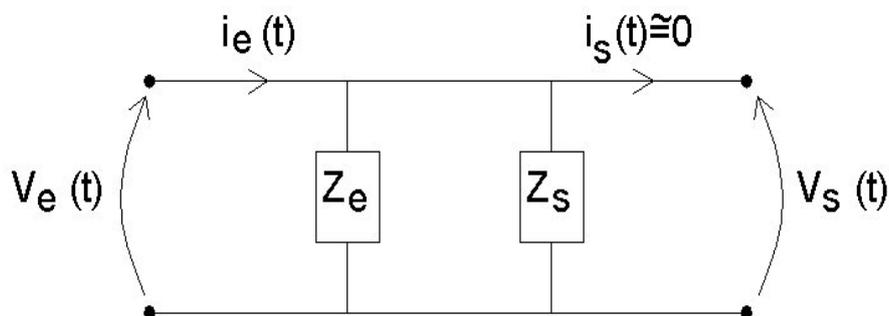
O modelo proposto funciona? Justifique sua resposta baseando-se em argumentos físicos, nos erros experimentais e nos desvios relativos. Caso a resposta seja negativa, que modelo proporia, e por quê?

## Filtro RC

Em muitos circuitos, ou sistemas eletrônicos, são usados componentes que possuem quatro terminais para ligações elétricas, duas de entrada e duas de saída e esses elementos são chamados de quadripolos elétricos. No **capítulo 13** da apostila de **CFE** há mais informações a esse respeito.

Para o estudo proposto de alguns quadripolos passivos, são necessárias certas definições. Além disso, para tornar a caracterização desse elemento, submetido a tensões alternadas, mais simples é preciso usar a notação complexa.

A **figura 1.18** abaixo representa um quadripolo qualquer. Os parâmetros importantes são as tensões e as correntes complexas de entrada e saída e as impedâncias complexas de entrada e saída.



**Figura 1.18: Modelo simples para um quadripolo elétrico.**

A impedância complexa de entrada é definida como a razão entre a tensão complexa de entrada e a corrente complexa de entrada:

$$\hat{Z}_e = \frac{\hat{V}_e(t)}{\hat{i}_e(t)} \quad (1.75)$$

Do ponto de vista de saída o quadripolo mais simples se comporta como uma impedância complexa de saída  $\mathbf{Z}_s$ , definida como:

$$\hat{Z}_s = \frac{\hat{V}_s(t)}{\hat{i}_s(t)} \quad (1.76)$$

Outra relação importante e que descreve essencialmente o comportamento de um quadripolo é a relação entre a tensão complexa de entrada e a tensão complexa de saída que é chamada de ganho complexo do quadripolo:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_s(t)}{\hat{V}_e(t)} \quad (1.77)$$

Considerando que as tensões complexas de entrada e saída podem ser escritas como:

$$\hat{V}_e(t) = V_{Pe} e^{j\omega t} \quad \text{e} \quad \hat{V}_s(t) = V_{Ps} e^{j(\omega t + \phi)} \quad (1.78)$$

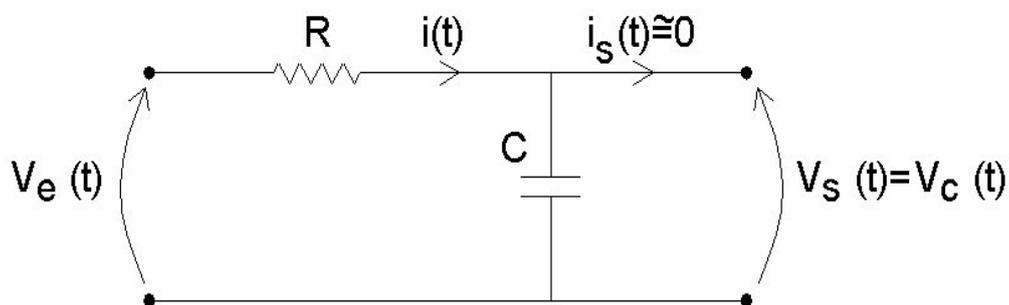
o ganho complexo desse quadripolo pode ser escrito nos seguintes termos:

$$\hat{G} = G_0 e^{j\phi} \quad \text{onde} \quad G_0 = \frac{V_{Ps}}{V_{Pe}} \quad (1.79)$$

lembrando que  $\mathbf{V}_{ps}$  e  $\mathbf{V}_{pe}$  são as tensões de pico, ou máximas, de saída e de entrada, respectivamente. Portanto,  $\mathbf{G}_0$  que é o módulo do ganho complexo, é o ganho real do quadripolo ou simplesmente

ganho do quadripolo.  $\phi$  é a defasagem entre a tensão de saída e a tensão de entrada.

Tendo em mente essas definições vamos analisar o circuito **RC** da **figura 1.19** a seguir:



**Figura 1.19: Modelo de um quadripolo RC.**

Para facilitar a análise, sem que haja alterações nas características de operação do circuito de interesse, vamos supor que a impedância,  $Z_{ext}$ , do circuito externo que vai ser ligado à saída desse quadripolo **RC** seja muito maior que a impedância de saída do próprio quadripolo,  $Z_s$ , ou seja:

$$Z_s \ll Z_{ext} \quad (1.80)$$

Neste caso, a corrente de saída pode ser considerada desprezível, se comparada à corrente de entrada. Assim, a corrente que passa pelo capacitor é praticamente igual à corrente que passa pelo resistor.

A tensão de saída complexa desse circuito **RC** é a tensão sobre o capacitor,  $\mathbf{V}_c$ , portanto:

$$\hat{V}_c(t) = \frac{1}{j\omega C} i_p e^{j(\omega t + \phi)} \quad (1.81)$$

e, também, por definição a impedância complexa do capacitor é igual à razão entre a tensão complexa a que ele está submetido e a corrente complexa que o atravessa, ou:

$$\hat{V}_c(t) = \hat{Z}_c \hat{i}(t) \quad (1.82)$$

Por outro lado, a tensão complexa de entrada do quadripolo **RC** é o produto da sua impedância complexa de entrada pela corrente complexa de entrada,  $\mathbf{i}(t)$ :

$$\hat{V}_e(t) = \hat{Z}_e \hat{i}(t) \quad (1.83)$$

a impedância complexa de entrada,  $\mathbf{Z}_e$ , é a soma das impedâncias complexas do resistor (que só possui parte real) e do capacitor, ou:

$$\hat{Z}_e = R + \frac{1}{j\omega C} \quad (1.84)$$

O ganho complexo desse circuito **G**, definido como a razão das tensões complexas de saída e entrada, pode ser escrito como:

$$\hat{G} = \frac{\hat{V}_c}{\hat{V}_e} = \frac{\hat{Z}_c \hat{i}(t)}{\hat{Z}_e \hat{i}(t)} \quad (1.85)$$

$Z_e$  é dada pela **fórmula 1.84** e  $Z_c$  é a impedância complexa do capacitor:

$$\hat{Z}_c = \frac{1}{j\omega C} \quad (1.86)$$

substituindo na **equação 1.77** vamos obter para o ganho:

$$\hat{G} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad (1.87)$$

$(1/RC)$  tem dimensão de frequência angular e será definido como  $\omega_c$ .

O ganho complexo fica, em termos dessas grandezas:

$$\hat{G} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \quad (1.88)$$

O ganho real é o módulo do ganho complexo acima:

$$G_0 = \sqrt{\hat{G}\hat{G}^*} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (1.89)$$

e a defasagem entre a tensão de saída e a tensão de entrada é  $\phi$ , é:

$$tg\phi = \frac{imag\hat{G}}{real\hat{G}} = -\omega RC \quad (1.90)$$

Portanto, o ganho real do quadripolo **RC**, em estudo, depende da freqüência da tensão alternada a que ele está submetido. No caso em que essa freqüência é baixa de tal maneira que  $\omega \ll \omega_c$ , o termo  $(\omega^2/\omega_c^2)$ , na **equação 1.89** fica muito pequeno se comparado à unidade e, como conseqüência, o ganho é praticamente igual a **1**. O que quer dizer que a tensão de saída é praticamente igual à tensão de entrada. Se a freqüência for alta, ou seja,  $\omega \gg \omega_c$ , o termo  $(\omega^2/\omega_c^2)$  é tão grande, que o algarismo **1**, no denominador da **fórmula 1.89**, pode ser desprezado e o ganho é praticamente igual à  $\omega_c/\omega$ . Esse número, porém, é muito pequeno o que significa que para freqüências altas a tensão de saída é muito menor que a tensão de entrada.

A conclusão dessa análise é que esse circuito atenua bastante a tensão de saída, para freqüências altas e permite uma tensão de saída praticamente igual à tensão de entrada para freqüências baixas. Esse é o funcionamento básico de um filtro de freqüências, em particular de um filtro "**passa-baixas**". Neste contexto é importante notar que as freqüências são consideradas altas ou baixas em relação ao valor de  $\omega_c$ . Se a freqüência da tensão de entrada for igual a esse valor,  $\omega = \omega_c$ , o ganho fica igual a  $1/\sqrt{2}$ . Ou seja, a tensão de saída é igual à tensão de entrada dividida por  $\sqrt{2}$  e essa freqüência, como é igual ao inverso do produto **RC**, é característica do filtro e o identifica. Convencionou-se, então, chamar  $\omega_c$  de freqüência de corte.

Pode-se também usar a definição do ganho em decibéis, que é a definição mais utilizada em engenharia:

$$G(\text{dB}) = 20 \log G = -10 \log \left( 1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) \quad (1.91)$$

quando  $\omega = \omega_c$ ,  $G(\text{dB}) = -3,010\dots$ , e, por isso, a frequência  $f_0 = \omega_c / 2\pi$  também é chamada de “**frequência -3dB**”.

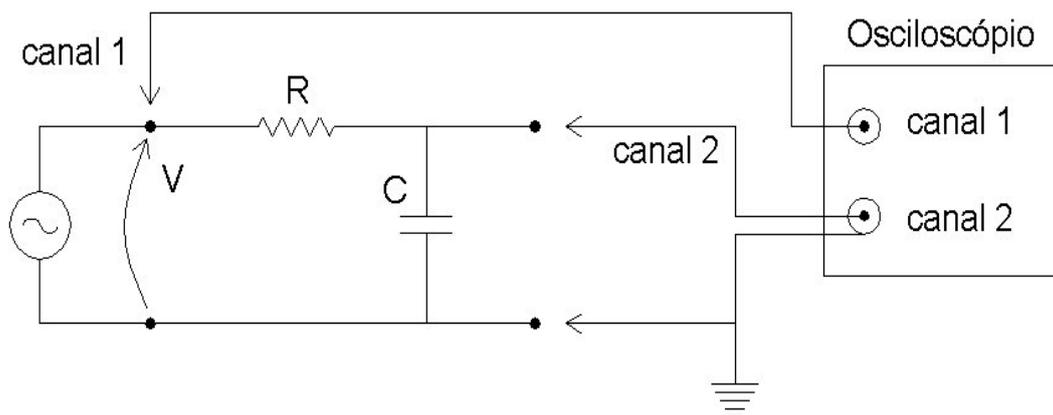
Chama-se de curva de resposta do filtro ao gráfico do ganho em função da frequência angular.

## Procedimento Proposto para o Filtro RC

Projetar um filtro **RC** “**passa-baixas**” com frequência de corte,  **$f_c$** , por volta de **500Hz**. Isso significa escolher valores da resistência e da capacitância adequados para se obter esse valor de **500Hz** com o compromisso de que esses elementos (com os valores escolhidos) estejam disponíveis no laboratório.

Simular com o programa **EWB** o comportamento do filtro projetado (circuito da **figura 1.19**), medindo e anotando os valores de pico das tensões de entrada e saída, em função da frequência da tensão de entrada, para posterior comparação com os valores experimentais.

Montar o circuito da **figura 1.20**, colocando na entrada do filtro o gerador de áudio. Conectar um dos canais do osciloscópio na saída e o outro canal deve ser usado para medir a tensão de entrada. Prestar atenção na ligação dos terminais de terra das pontas de prova.



**Figura 1.20: Circuito para o estudo do comportamento do filtro RC.**

Medir os valores de pico das tensões de entrada e saída do filtro da **figura 1.20**, assim como a defasagem da tensão de saída em relação à tensão de entrada, em função da frequência. Lembrar que o osciloscópio deve estar calibrado, assim como verificada a confiabilidade das escalas de frequência do gerador. Cerca de quinze medidas devem ser suficientes, desde que convenientemente escolhidas a fim de caracterizar muito bem o comportamento do filtro (e que estejam dentro da faixa de frequência aceita pelo osciloscópio). Fazer o gráfico que melhor evidencie esse comportamento. Comparar com o comportamento previsto teoricamente e pelo previsto pelo programa **EWB**. Superpor as três curvas na mesma figura para facilitar a comparação.

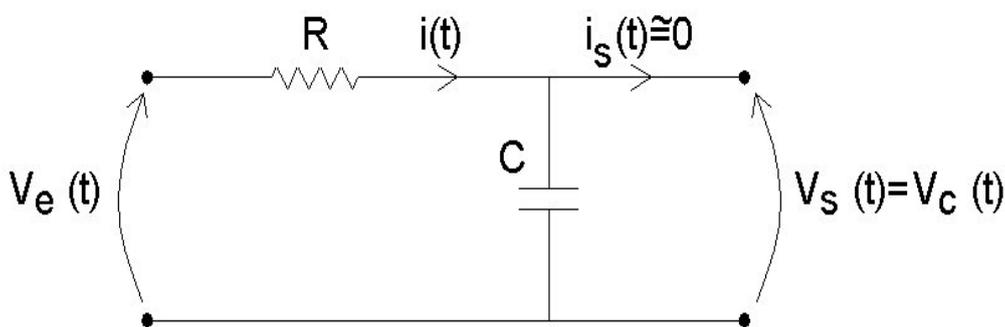
Desse gráfico, obter o valor experimental da frequência característica do filtro e comparar, levando em conta os erros, com o valor esperado.

Fazer um gráfico da defasagem da tensão de saída em relação à tensão de entrada em função da frequência. Comparar com o comportamento esperado, sempre superpondo a curva teórica à curva experimental.

É interessante analisar o comportamento de um quadripolo **RC** como esse que foi descrito, com a única diferença que é trocada a posição do resistor com a do capacitor. A tensão de saída, agora, é a tensão sobre o resistor,  $V_R$ . A previsão do comportamento desse circuito é análoga à que foi realizada para o filtro "**passa-baixas**". Entretanto, as conclusões são diferentes. **Esse estudo, com as deduções e justificativas das conclusões deve constar do relatório.** Não vai haver tempo, provavelmente, para a realização de medidas experimentais, mas é possível fazer a simulação com o programa **EWB**, da mesma maneira como foi sugerido para o filtro "**passa-baixas**". Comparar os resultados da simulação com os previstos teoricamente (superpor as curvas que ilustram esse comportamento no mesmo gráfico). Comentar os resultados.

## Circuito Integrador RC

Um circuito integrador realiza a integração de uma tensão variável no tempo,  $V(t)$  em relação ao tempo  $t$ . O circuito integrador passivo mais utilizado é o circuito **RC** da **figura 1.19** que repetimos abaixo:



**Figura 1.21: Circuito integrador RC.**

O circuito é alimentado com uma tensão alternada na entrada. A impedância externa (ou de carga), que vai ser colocada na saída desse quadripolo, deve ser muito maior que a impedância de saída do mesmo, para garantir que a corrente de saída seja desprezível face à corrente de entrada,  $i(t)$ . O cálculo a seguir só é válido se essa hipótese for satisfeita. Utilizando a notação complexa podemos calcular o ganho complexo exatamente como foi feito para o filtro:

$$\hat{G} = \frac{1}{j\omega RC} \quad (1.92)$$

que é a **fórmula 1.87**.

Mas, por definição, o ganho complexo é a razão entre a tensão complexa de saída e a tensão complexa de entrada, e, utilizando a **equação 1.92** acima:

$$\hat{V}_s(t) = \hat{G}\hat{V}_e(t) = \frac{1}{j\omega RC} \hat{V}_e(t) \quad (1.93)$$

Para o caso de frequências altas se comparadas à frequência de corte  $\omega_c = 1/RC$ , ou seja,  $\omega \gg 1/RC$ , ou ainda  $\omega RC \gg 1$ , podemos aproximar  $V_s(t)$  na **equação 1.93** para:

$$\hat{V}_s(t) = \frac{1}{j\omega RC} \hat{V}_e(t) \quad (1.94)$$

mas,

$$\hat{V}_e(t) = V_{Pe} e^{j\omega t} \quad \text{e} \quad \int \hat{V}_e(t) dt = \frac{1}{j\omega} V_{Pe} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \hat{V}_e(t) \quad (1.95)$$

ou seja, o termo  $(1/j\omega RC)V_e(t)$  na **equação 1.94** é, de fato, a integral da tensão complexa de entrada dividida por **RC**:

$$\hat{V}_s(t) = \frac{1}{RC} \int \hat{V}_e(t) dt \quad \text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{RC} \quad (1.96)$$

Resumindo, se a condição de altas frequências é satisfeita ( $\omega \gg 1/RC$ ) o circuito **RC** da **figura 1.20** realiza a integração da tensão de entrada. Por isso é chamado de **circuito integrador RC**. Além da condição de altas frequências, a condição de corrente de saída desprezível (em relação à corrente de entrada) deve estar satisfeita, porque essa foi uma das hipóteses iniciais para a dedução feita. Ou seja, a impedância externa (ou de carga) deve ser muito maior que a impedância de saída do circuito integrador.

Esse tipo de integrador passivo tem a grande vantagem de ser muito simples de construir e operar, mas, apresenta dois inconvenientes que podem inviabilizar sua utilização para certas aplicações. Um deles consiste em não funcionar para baixas frequências e o outro é a grande redução na amplitude de pico do sinal de saída. A **equação 1.94** mostra que a amplitude de pico do sinal de saída é reduzida de um fator  $\omega RC \gg 1$ . Essas dificuldades podem ser contornadas com a utilização de um integrador ativo. Um circuito desse tipo é discutido no **capítulo 14** da apostila de **CFE**.

Um quadripolo **RC**, passivo, do mesmo tipo, simplesmente invertendo as posições do resistor com a do capacitor, funciona como um circuito que produz, na saída, a derivada do sinal colocado na entrada. O funcionamento desse circuito é discutido em detalhe na **seção 13.4.2** da apostila de **CFE (parte 2)**. Esse circuito é conhecido como circuito **diferenciador RC** e apresenta vantagens e desvantagens semelhantes às do circuito **integrador RC**.

## Análise de Fourier

Uma tensão ou corrente qualquer, variável no tempo, pode ser descrita como uma superposição de tensões ou correntes alternadas senoidais de frequência definida. Matematicamente uma tensão periódica qualquer pode ser representada por uma série ou integral de Fourier, como pode ser visto na apostila **CFE (parte 2)**, seção **13.4.3** ou no **capítulo 4** do livro "**Física Matemática**" de E. Butkov.

No caso dos circuitos estudados, há dois aspectos relacionados à sugestão de usar o critério da representação de tensões periódicas por meio das séries de Fourier, para caracterizar a eficácia de um integrador ou de um filtro:

- (1) matemático
- (2) prático

Do ponto de vista matemático, a definição geral de uma série que represente uma função periódica no tempo genérica, é:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (1.97)$$

onde :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{para } n \geq 0 \quad (1.98)$$

e:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{+x} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \quad \text{para } n > 0 \quad (1.99)$$

Esse estudo está realizado em detalhe no **capítulo 4** do livro "**Física Matemática**" de E. Butkov.

Considerando o caso do circuito integrador, por uma questão de simplicidade e didática, vamos estudar experimentalmente, a integração de uma onda quadrada. Portanto, estamos interessados no conjunto de tensões harmônicas de diferentes amplitudes e freqüências que compõem a tensão representada por uma onda quadrada. Na mesma referência anterior é feito o cálculo dos coeficientes das séries de Fourier para uma onda quadrada:

$$V(t) = \frac{4V_P}{\pi} \text{sen}\omega t + \frac{4V_P}{3\pi} \text{sen}3\omega t + \frac{4V_P}{5\pi} \text{sen}5\omega t + \dots$$

**(1.100)**

onde  $V_P$  é a tensão de pico da onda  $V(t)$ ,  $\omega$  é a sua freqüência angular e o número de termos se estende ao infinito. Vemos que para compor uma onda quadrada foi necessário somar ondas de amplitudes e freqüências diferentes (notar que as freqüências das componentes são múltiplos ímpares da freqüência da primeira componente). Na prática, pode-se obter uma aproximação razoável para uma onda quadrada considerando apenas alguns termos da expressão acima (veja as figuras na **página 155** da apostila de **CFE**).

Para uma onda triangular, por exemplo, a série que a representa é:

$$V(t) = \frac{8V_P}{\pi^2} \text{sen}\omega t - \frac{8V_P}{(3\pi)^2} \text{sen}3\omega t + \frac{8V_P}{(5\pi)^2} \text{sen}5\omega t - \dots \quad \text{(1.101)}$$

Para muitas aplicações é útil conhecer as principais ondas harmônicas que compõem uma tensão alternada periódica, por exemplo, quando se tem que projetar um filtro ou integrador ou diferenciador para uma tensão alternada periódica. Nesse caso,

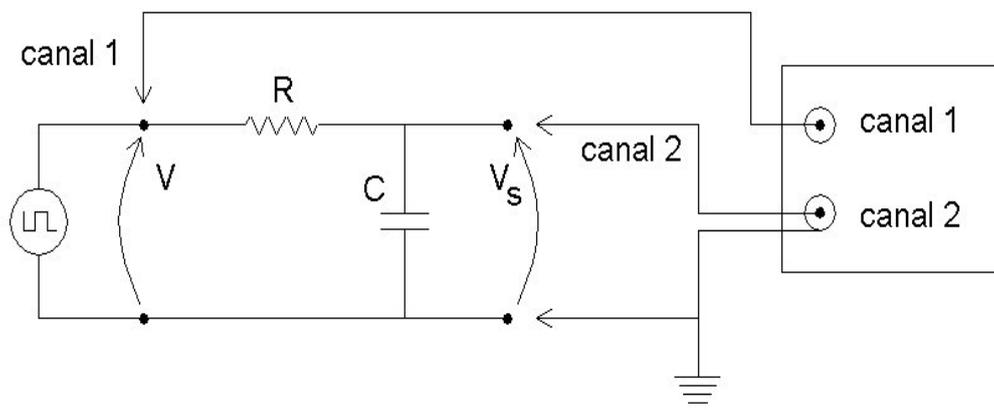
temos que conhecer as principais harmônicas que compõem o sinal de interesse para saber se um determinado tipo de circuito vai funcionar ou não, e, se funcionar, para poder escolher os parâmetros para ter o circuito mais adequado.

O lado prático, que é visualizar essas principais componentes harmônicas da tensão alternada periódica, pode ser resolvido usando um programa de análise de Fourier associado ao programa de aquisição de dados **DataStudio**. O microcomputador vai armazenar o sinal de interesse (onda quadrada, senoidal, triangular, pulsos, etc.) que, em seguida, é analisado pelo programa de transformada de Fourier, cujo nome é **Fast Fourier Transform (FFT)** que é a sigla que o identifica no **DataStudio**). Na sua concepção mais simples, o programa analisa um sinal periódico no tempo calculando o espectro das amplitudes de cada componente em função da frequência **f**. A saída desse programa é um histograma cujo eixo vertical é proporcional à amplitude de pico das componentes e cujo eixo horizontal é a frequência. Este histograma é a transformada de Fourier do sinal de entrada. Uma maneira simples de se verificar isso é fazer a comparação do cálculo teórico dos coeficientes de Fourier para a função  **$f(t) = A \sin \omega t$** , (**A** e  **$\omega$**  escolhidos à vontade) com os coeficientes obtidos através do programa **FFT** do **DataStudio**, para uma função idêntica a essa, que é fornecida pelo gerador de áudio.

Um exercício, que deve ser incluído no relatório, é a utilização de um outro aplicativo, o **Wave Optics on the Computer (WOC)**, que permite a observação das componentes de frequência de algumas funções periódicas e não periódicas, com parâmetros ajustáveis. O exercício é observar uma onda quadrada verificando suas componentes, e, além disso, construir a onda quadrada escolhida, somando um a um os seus componentes harmônicos.

## Procedimento para o Circuito Integrador RC

Montar o circuito **RC** da **figura 1.22** a seguir; a diferença em relação ao circuito usado para o filtro “**passa-baixas**” da **figura 1.20**, é que o gerador de áudio deve ser ajustado para fornecer uma onda quadrada, ao invés de senoidal.



**Figura 1.22: Circuito RC integrador - montagem.**

O circuito deve ser projetado para integrar frequências que sejam muito maiores que **200Hz** e deve utilizar um capacitor de **1 $\mu$ F**. Calcular o valor de **f<sub>C</sub>** do circuito.

Antes de começar as medidas, fazer a previsão teórica do resultado da integração (forma da onda, amplitude de pico e frequência) de uma onda quadrada de frequência conveniente (**f  $\gg$  200Hz**), de amplitude de pico igual a **V<sub>p</sub>**. Quando fizer as medidas experimentais substituir **V<sub>p</sub>** pelo valor de pico da tensão utilizada.

A seguir, com o circuito **RC** integrador que projetou, determine primeiro qual a faixa de frequências para a qual o funcionamento do integrador pode ser considerado satisfatório. Um critério visual cuidadoso é suficiente, desde que se saiba qual é a integral da onda quadrada. Essa foi uma das razões por que foi pedida a previsão do resultado da integração de uma onda quadrada: essa visualização é mais fácil.

Fazer figuras, em escala, da tensão de entrada e da tensão de saída do circuito integrador, para um período completo e numa frequência conveniente (uma frequência em que se tenha observado visualmente que o circuito funciona como um bom integrador). Verificar quantitativamente que a integração está correta.

Uma vez feita a previsão teórica e as medidas experimentais, fazer a simulação com o programa **EWB**, medindo as tensões de entrada e saída, do circuito integrador e verificando se os resultados estão coerentes com as previsões teóricas. Usar exatamente os mesmos parâmetros de circuito que vão ser utilizados nas medidas experimentais para permitir a comparação. Superpor, no mesmo gráfico, os resultados experimentais à curva teórica e à curva prevista pelo programa EWB. Comparar e comentar (se há discrepâncias, de quanto, onde, porque, etc).

Em seguida, analisar tanto o sinal de entrada (onda quadrada), quanto o sinal de saída para verificar quais são as principais componentes harmônicas dessas tensões alternadas.

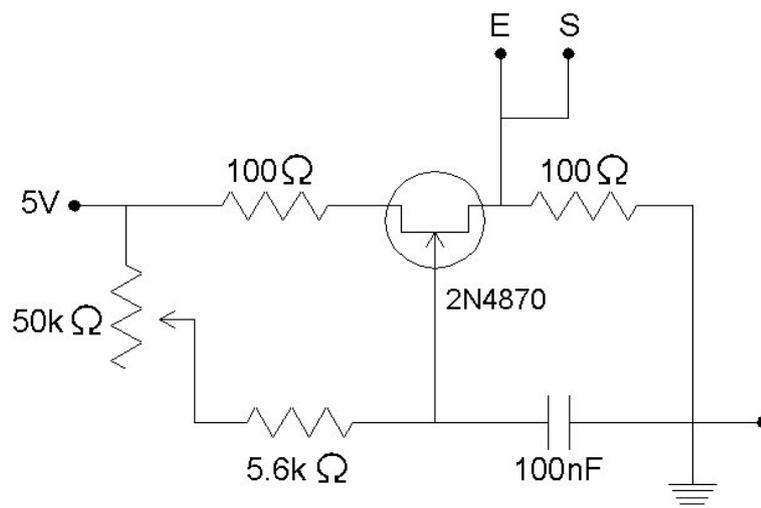
Antes de começar essa análise, é conveniente fazer um teste de funcionamento do programa **FFT** do **DataStudio** com um sinal senoidal puro de frequência da ordem de **100Hz** e testar a pureza do sinal observando o espectro de frequências fornecido pelo programa. Deve haver uma só frequência presente, se o sinal for uma senoide perfeita. Ao aumentar a amplitude do sinal para causar uma saturação parcial, vai-se perceber o aparecimento de componentes harmônicas ímpares no espectro de frequências. Porque isso ocorre? Justificar a resposta.

Para a observação das componentes harmônicas dos sinais de entrada e saída do circuito integrador, ligar o sinal que se quer analisar na interface do microcomputador, e, utilizando o programa **FFT** do **DataStudio** obter as transformadas de Fourier desses sinais. Fazer uma análise quantitativa dos resultados e comparar com o comportamento esperado teoricamente.

## Análise de Fourier aplicada ao filtro RC

Com o que foi aprendido sobre o funcionamento de um filtro tanto do tipo “**passa-baixas**” frequências quanto de um “**passa-altas**” frequências, é possível fazer um teste da eficácia dos mesmos, alimentando-os com sinais quaisquer.

O circuito gerador de pulsos esquematizado na **figura 1.23** a seguir, superpõe pulsos de frequência da ordem de **1kHz** a um sinal senoidal de **100Hz**. Utilizando o sinal de saída desse gerador para a entrada do filtro escolhido, é possível ilustrar quantitativamente a supressão de sinais indesejados.



**Figura 1.23: Circuito gerador de pulsos.**

A proposta é projetar dois tipos de filtro: um filtro “**passa-baixas**”, para quando se está interessado somente no sinal senoidal

de **100Hz**; e um filtro “**passa-altas**” para quando se quer apenas os pulsos de frequência da ordem de **1000Hz**.

Em ambos os casos devem ser escolhidos os valores da resistência e da capacitância convenientes para que o quadripolo **RC** funcione, primeiro, como um filtro “**passa-baixas**”, e, depois como um filtro “**passa-altas**”. Para facilitar essa escolha, fazer uma análise de Fourier do sinal do circuito gerador de pulsos para verificar quais são as frequências das componentes do sinal que vai entrar no seu filtro. Para tanto, ligar a saída do gerador diretamente na interface do microcomputador e analisá-la com o programa **FFT** do **DataStudio**. Dessa maneira vai ser mais fácil escolher a frequência de corte mais conveniente para cada tipo de filtro.

Uma vez projetado o filtro “**passa-baixas**”, ligar na entrada do filtro a saída do gerador de pulsos. Ligar um dos canais do osciloscópio na saída do filtro e o outro na saída do circuito gerador (ou entrada do filtro). Observar visualmente se o filtro está funcionando satisfatoriamente como um filtro “**passa-baixas**”.

A seguir, ligar o sinal de saída do filtro na interface do microcomputador e analisá-lo com o programa **FFT**. Comparar quantitativamente, o resultado dessa análise com o da análise feita, com o mesmo programa, para o sinal de entrada do filtro. O que se pode concluir dessa comparação? Justificar.

Repetir todo o procedimento acima para o caso do filtro “**passa-altas**”. O que se pode concluir neste caso? Justificar.